مجله تحقیقات اقتصادی / شماره ۶۹ / تابستان ۱۳۸۴ / صفحات ۲۶-۱

مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی

دکتر حمید خالوزاده*

دکتر علی خاکی صدیق**

تاریخ دریافت ۸۳/۴/۱۰ تاریخ پذیرش ۸۳/۶/۳۱

چکیده

فرایندهای سری زمانی را می‌توان به سه طبقه خطی، تصادفی و آشوبگونه دسته بندی کرد و براین اساس قابلیت پیش‌بینی در فرایندهای خطی ممکن، درفرایندهای تصادفی غیرممکن و در فرایندهای آشوبگونه تا حدی ممکن است.

تحقیقات و مطالعات انجام شده قبلی در زمینه مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام بیشتربر اساس اثبات این فرضیه بوده است که تغییرات قیمت و بازده سهام در بازار بورس و مخصوصاً بازار بورس تهران علیرغم شباهت زیادی که به رفتار تصادفی و اتفاقی دارد، اتفاقی نیست بلکه از نوع آشوبگونه است و بنابر این می‌توان توسط مدل‌های پیچیده و قوی مانند شبکه‌های عصبی، فازی و ترکیب‌های مختلف این دو روش مدل‌سازی و نیز پیش‌بینی کوتاه مدت و میان مدت را انجام داد. در این تحقیق، تغییرات قیمت و بازده سهام در بازار بورس تهران با هدف مدل‌سازی بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی[1] بر روی مقوله پیش‌بینی، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است، با در نظر گرفتن نوسانات قیمت سهام به شکل تصادفی و بر اساس مدل بلاک و شولز، مدل سازی دینامیک فرایند مولد قیمت سهام در بازار بورس تهران را با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی پیشنهاد کرده و بر این اساس مدل‌سازی، شبیه‌سازی و پیش‌بینی قیمت و بازده برای یکی از شرکت‌های عضو بازار بورس تهران انجام می‌گیرد، برای بررسی کارایی روش پیشنهادی مقایسه‌ای نیز با روش مدل‌سازی خطی صورت پذیرفته است.

طبقه‌بندی JEL: C5، C53.

کلید واژه: سری زمانی، مدل‌سازی، پیش‌بینی، مدل‌های ARIMA، معادلات دیفرانسیل تصادفی، انتگرال ایتو.

---

* استادیار گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
h_khaloozadeh@eetd. kntu. ac. ir.

** استاد گروه کنترل دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
sedigh@eetd. kntu. ac. i.

1- Stochastic Differential Equations (SDE).

۱- مقدمه

ناشناخته بودن عوامل تأثیرگذار بر تغییرات قیمت سهام همواره دلیلی برای روی آوردن به پیش‌بینی تغییرات قیمت سهام شرکت‌هاست، پیش‌بینی قیمت یا بازده سهام به کمک کشف الگوهای رفتاری فرایند مولد قیمت سهام امکان‌پذیر است، میزان موفقیت در کشف این‌گونه الگوهای رفتاری، میزان کارایی پیش‌بینی را مشخص می‌کند. درواقع فرایند مولد قیمت سهام را می‌توان به عنوان یک الگوی پویا بررسی کرد، فرایند مزبور ممکن است به صورت مدل‌های خطی[1]، مدل‌های غیرخطی[2] و یا مدل‌های تصادفی[3] به‌دست آید.

امروزه یکی از مهمترین موضوعات مورد علاقه اقتصاددانان و تحلیلگران مالی تبیین چگونگی و روند نوسان‌های قیمت‌هاست که راه‌های متفاوت و دیدگاه‌های گوناگونی را در این باره پدید آورده است. در این میان با توجه به دردسترس نبودن اطلاعات دقیق درباره عوامل مؤثر بر نوسان‌های بازار سهام، پیش‌بینی این تغییرات به سادگی میسر نیست و بر این اساس فرضیه بازار کارآمد[4] مطرح می‌شود، بدین معنا که نوسان‌های قیمت سهام با استفاده ازاطلاعات در دسترس و عمومی غیرقابل پیش‌بینی است، در واقع این فرضیه مبتنی بر نظریه گام‌های تصادفی[5] است، بیان مخالف فرضیه فوق به معنای پیش‌بینی‌پذیری[6] قیمت‌هاست. از اواسط دهه ۷۰ و مخصوصاً از سال ۱۹۸۰کوشش‌های جدید و گسترده‌ای در زمینه پیش‌بینی‌پذیری قیمت‌های سهام با استفاده از روش‌های ریاضی جدید، سری‌های زمانی طولانی و ابزارهای پیشرفته‌تر آغاز شد. آزمون‌های زیادی بر روی اطلاعات قیمت و شاخص سهام درکشورهایی مانند انگلستان، آمریکا، کانادا، آلمان و ژاپن صورت گرفت تا وجود ساختاری معین در اطلاعات قیمت سهام نشان داده شود. و از این راه فرضیه گام‌های تصادفی را نقض کنند. از سال ۱۹۹۷ در ایران،

1- Linear Model.
2- Nonlinear Model.
3- Stochastic Model.
4- Efficient Market Hypothesis (EMH).
5- Random Walk.
6- Forecastability.

در بازار بورس تهران نیز مطالعاتی در این زمینه آغاز شد (خالوزاده بهمن ۱۳۷۷)، با استفاده از نظریه آشوب[1] که به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای تحلیل و پردازش اطلاعات قیمت سهام شناخته شده است، بعد فراکتالی[2] فرایند مولد قیمت (بازده) سهام محاسبه شد، مقدار به‌دست آمده پیچیدگی فرایند مولد قیمت را نشان می‌دهد و همچنین فرایند سری زمانی مربوطه را از یک فرایند تصادفی و اتفاقی متمایز می‌کند (خالوزاده ودیگران ۸۰ و ۱۳۷۷)، بر پایه تحلیل (R/S)[3] یا تغییر مبنای حوزه تغییرات سری زمانی قیمت، ماهیت غیرتصادفی فرایند مولد قیمت سهام نشان داده شده و همچنین متوسط تناوب گردش[4] سری زمانی قیمت به‌دست آمده است (خالوزاده ودیگران ۱۳۷۷).

پیش‌بینی نوسانات قیمت سهام در بازار بورس تهران نیز با استفاده از مدل‌های خطی و مدل‌های غیرخطی (شبکه‌های عصبی غیرخطی) صورت پذیرفته است که در آن پژوهش قابلیت استخراج ساختار فرایند مولد قیمت درشبکه‌های عصبی نشان داده شده است[5].

اصولاً پیش‌بینی، عنصری کلیدی برای تصمیم‌گیری‌های مدیریتی است، در یک تصمیم‌گیری، دنباله‌ای ازتأثیرات این تصمیم و پیشامدهایی که بعد از تصمیم‌گیری ممکن است رخ دهد، در نظر گرفته می‌شود. قابلیت براورد این تأثیرات کنترل ناپذیر موجب بهبود انتخاب و تصمیم‌گیری خواهد شد. به‌همین خاطر سیستم‌های مدیریتی برای طراحی وکنترل عملگرهای تشکیلاتی خود نیاز به پیش‌بینی دارند. به‌طور کلی می‌توان گفت که پیش‌بینی، براورد پیشامدهای آینده است و هدف از پیش‌بینی کاهش ریسک در یک تصمیم‌گیری است. پیش‌بینی‌ها معمولاً صحیح نبوده و دارای مقداری خطا هستند که این میزان با داشتن اطلاعات بیشتر در مورد سیستم کاهش می‌یابد. با افزایش هزینه

1- Chaos Theory
2- Fractal Dimension.
3- Rescaled Range Analysis.
4- Mean Orbital Period.
5- Khaloozadeh, H., Khaki Sedigh, A.,(2001).

پیش‌بینی می‌توان مقدار ریسک را کاهش داد. اکثراً ارتباطی بین این دو وجود دارد. چون پیش‌بینی همیشه با مقداری خطا همراه است قادر به حذف کامل ریسک نبوده و بنابراین فرایند تصمیم‌گیری مستلزم مقداری عدم یقین ناشی از پیش‌بینی خواهد بود. رابطه بین تصمیم‌گیری و پیش‌بینی را با رابطه زیر می‌توان بیان کرد.

خطای معقولی برای پیش‌بینی + تصمیم‌گیری براساس صحت پیش‌بینی = تصمیم صحیح

۱-۱- رفتار قیمت

ضمن این‌که محققان مالی اغلب معتقد هستند که نوسانات قیمت سهام متغیر با زمان است[۱]، تعداد کمی نیز عقیده دارند که شکل تابعی مشخصی برای این وابستگی زمانی وجود دارد و به‌عنوان مثال نوسانات بازده سهام را به‌عنوان یک فرایند پخش[۲] مدل می‌کنند (استین و دیگران ۱۹۸۷، هال و دیگران ۱۹۸۷، داهیلن و دیگران ۱۹۹۱)[۳]، و نیز تعداد بسیار زیادی از محققان، نوسانات را به صورت فرایندی با مدل‌های ARCH[۴] در نظر می‌گیرند. (چو ۱۹۸۸، اکگیاری ۱۹۸۹، بایلی و دیگران ۱۹۹۰، هینن ۱۹۹۳)[5]

در سال‌های اخیر با توجه به پیشرفت و رشد تکنیکی بالا، طبقه‌ای از فرایندها به‌نام فرایندهای آشوبگونه[۶] شناسایی وکشف شده است. آشوب مربوط است به فرایندی معین که به‌نظر فرایندی تصادفی می‌رسد وقتی که با روش‌ها و تکنیک‌های مرسوم سری‌های زمانی مطالعه شود. یک فرایند آشوبگونه را می‌توان به‌عنوان یک فرایند غیرخطی و معین تعریف کرد که دارای خواص گشتاور اول و دوم مشابه با سری زمانی تصادفی است (گراسبرگر و دیگران ۱۹۸۳، تاکینز ۱۹۸۰، خالوزاده و دیگران ۱۳۸۲، خالوزاده و دیگران ۲۰۰۴، براک و دیگران

1- French, K. R., Schwert, G. and Stambaugh, F., (1987).
2- Diffusion Process.
3- Stein et al (1987), Hall et al (1987), Dhillon et al (1991).
4- Auto Regressive Conditional Heteroscedasticity.
5- Chou R. (1988), Akgiray (1989), Bailey et al (1990), Heynen (1993).
6- Chaotic Process.

۱۹۸۷)[1]. این سری زمانی دارای دو مشخصه اصلی است:

الف: از جنبه نظری هیچ نقطه‌ای تکرار نمی‌شود، هر چند در عمل به‌خاطر گردکردن ارقام محاسباتی این امر اتفاق می‌افتد.

ب: الگوی فرایند رو به‌جلو به‌شدت به شرایط اولیه حساس است.

بنابراین یک پیش‌بینی براساس اطلاعات مبهم، ناصحیح خواهد بود و میزان و مقدار این عدم دقت (نمای لیاپانوف[2]) به‌طور نمایی با طول دوره زمانی پیش‌بینی افزایش خواهد داشت. جذابیت فرایند آشوب غیرخطی دراقتصاد مالی این است که سیستم‌های آشوبگونه قادر به ایجاد گونه‌های غنی از الگوهای سری زمانی از ساختارهایی نسبتاً ساده هستند.

۲- تعریف صورت مسأله پیش‌بینی

برای تعریف مسأله پیش‌بینی باید از تصمیم‌گیری شروع کرد. اطلاعاتی که از سیستم و فرایند پیش‌بینی حاصل می‌شود برای بهبود فرایند تصمیم به‌کار می‌رود. مطالعه بر روی مسأله تصمیم‌گیری کمک خواهد کرد تا به سؤالاتی در مورد این‌که چه چیزی پیش‌بینی می‌شود، پیش‌بینی به چه شکلی صورت می‌گیرد، چه پارامترهایی درگیر مسأله پیش‌بینی هستند و بالاخره چه میزانی ازدقت پیش‌بینی مورد نیاز است، پاسخ داده شود.

۲-۱- سیستم‌های پویا

سیستم‌های پویا، سیستم‌هایی بوده که مقدار خروجی آنها در هر لحظه نه تنها بستگی به مقدار تحریک در آن لحظه داشته بلکه به مقادیر ماقبل نیز بستگی دارد. در برخی سیستم‌های پویا، رابطه ورودی - خروجی به‌گونه‌ای است که در آنها محرک خارجی قابل مشاهده نیست، به این سیستم‌ها، سیستم‌های سری زمانی گفته می‌شود. با استفاده ازاطلاعات موجود درباره سیستم سعی می‌شود،

1- Grassberger P. et al (1983), Takens F. (1980), Khaloozadeh et al (2004), Brok et al (1987).
2- Lyapunov Exponent.

ابتدا مدلی به آن اختصاص داده شود تا ارتباط بین متغیرهای سیستم مشخص شود. مدل‌ها به شکل‌های مختلف و درجه‌های متفاوتی از فرمول‌های ریاضی موجودند. برای بعضی از سیستم‌ها مناسب آنست که خواص آن را با جداول عددی و یا نمودار، نمایش دهیم که معمولاً به این‌گونه توصیف، مدل‌های گرافیکی گویند. در بعضی از کاربردهای پیشرفته ممکن است از مدل‌هایی استفاده شود که ارتباط بین متغیرهای سیستم را برحسب جملات ریاضی مانند معادلات دیفرانسیل و یا معادلات تفاضلی ارائه کند. به این گونه مدل‌ها، مدل‌های ریاضی ویا تحلیلی گفته می‌شود.

مدل‌های ریاضی ممکن است پیوسته یا گسسته با زمان[1]، معین یا تصادفی[2]، خطی و یا غیرخطی باشند. مدل‌های ریاضی در تمام شاخه‌های علوم مانند اقتصاد، زیست‌شناسی، پزشکی و مهندسی کاربرد دارد. همچنین از این مدل‌ها می‌توان به‌عنوان ابزاری برای شبیه‌سازی و پیش‌بینی استفاده کرد.

۲-۲- ساخت مدل

یک مدل با استفاده از اطلاعات ورودی - خروجی سیستم و تحلیل این اطلاعات توسط روش‌های ریاضی ساخته می‌شود. به این روش، شناسایی سیستم[3] گفته می‌شود. برای ساختن یک مدل با استفاده از اطلاعات مشاهده شده چهار عامل زیر لازم است:

اطلاعات،

مجموعه‌ای از مدل‌های داوطلب (این مدل‌ها به روش شناسایی بستگی دارد)،

قانون و معیاری که توسط آن مدل برتر انخاب شود،

براورد و ارزیابی مدل[4].

پس از این‌که مدل انتخاب شد،باید آزمایش کرد که آیا این مدل باندازه کافی

1- Continouse or Discrete Time.
2- Deterministic or Stochastic.
3- System Identification.
4- Model Validation.

مناسب و دقیق است یا خیر؟

روش‌های متفاوتی وجود دارد که ارتباط مدل را با اطلاعات مشاهده شده نشان می‌دهد.

۲-۳- حلقه شناسایی سیستم

روش شناسایی سیستم دارای یک چرخه طبیعی است، ابتدا جمع‌آوری اطلاعات صورت گرفته، بعد از آن مجموعه‌ای از مدل‌ها انتخاب می‌شوند و سپس بهترین مدل در این مجموعه انتخاب می‌شود. یک مدل ممکن است بنا به دلایل زیر قابل قبول و کارا نباشد.

- روند محاسباتی برای پیداکردن بهترین مدل براساس معیار مورد نظر، با مشکل مواجه شود.
- معیار و محک سنجش مدل به‌درستی انتخاب نشده باشد.
- کلیه اعضای مجموعه مدل نامناسب بوده و دارای هیچ عضوی که سیستم را به‌خوبی بیان کند، نباشد.
- مجموعه اطلاعات جمع‌آوری شده باندازه کافی غنی نبوده و مدل مناسب توسط این اطلاعات قابل شناسایی نباشد.

از مهمترین روش‌های متداول کلاسیک در رابطه با شناسایی سیستم‌ها می‌توان به روش‌های پارامتری اشاره کرد.

۳- روش‌های شناسایی پارامتری خطی

در این روش‌ها ابتدا ساختاری مشخص به سیستم نسبت داده می‌شود. سپس با استفاده از روش‌های آماری و اطلاعات ورودی - خروجی با یکسری مفروضات در مورد خواص آماری اطلاعات از جمله میزان پراکندگی، میانگین، نوع تابع توزیع و ... پارامترهای مجهول این ساختار به‌دست می‌آیند. ساختار کلی مدل‌های پارامتری به شکل زیر است:

$$A(q)\,y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}\,u\,(t - n_k) + \frac{C(q)}{D(q)}\,e(t) \qquad (1)$$

D, C, B, A و F چند جمله‌ای‌هایی با عملگرهای تأخیر هستند با درجات تأخیرخاص متناظر. $u(t)$ ورودی، $y(t)$ خروجی فرایند و $e(t)$ نویز موجود در سیستم است. بسته به این‌که از کدام چند جمله‌ای‌ها در ساختار کلی فوق استفاده شود، مدل‌های مختلفی رامیتوان داشت. با استفاده از گونه‌های مختلف روش بهینه‌سازی حداقل مربعات، ضرایب مدل انتخابی به‌گونه‌ای براورد می‌شوند تا میانگین مربع خطای بین خروجی‌های مدل و خروجی‌های مشاهده شده، سیستم کمینه شود. بسته به این‌که از کدام چند جمله‌ای‌ها در ساختار کلی فوق استفاده شود، مدل‌های معروف FIR, ARX, ARMA, ARMAX, ARIMA, BJ و غیره را خواهیم داشت[1].

تخمینگرهای حداقل مربعات، براساس ایده ساده برازش خروجی مدل به خروجی مشاهده شده شکل گرفته‌اند و ثابت می‌شود، این تخمینگرها دارای خواص آماری قابل توجه و تحت فرضی‌های خاصی هستند، مثلا ازنظر کمینه شدن کوواریانس خطا در میان تخمینگرهای خطی و بدون بایاس[2] بهینه هستند[3].

۳-۱- معیار ارزیابی رگرسیون

می‌توان، با استفاده از مانده‌های[4] مدل رگرسیون معیاری ساخت که با آن خوبی و برازندگی مدل را با داده‌ها اندازه گرفت. مدل رگرسیونی بد، مانده‌های بزرگ و مدل رگرسیونی خوب مانده‌های کوچک دارد. معیار استفاده شده در این مقاله مستقل از واحد اندازه‌گیری متغیرهای مدل براورد است، این معیار عبارتست:

1- Soderstrom, T. and Stoica, P., (1989).
2- Unbiased.
3- Schweppe, F. C. , (1973).
4- Residuals.

$$R^2 = 1 - \frac{\mathrm{var}(\varepsilon_N)}{\mathrm{var}(r_N)}, 0 \le R^2 \le 1 \qquad (۲)$$

که البته در عمل از براورد واریانس به‌وسیله تقریب‌های زیر استفاده مـی‌شـود. عبارت معادل برای فرضیه بازار کارا که در اینجا از آن استفاده می‌شود این گونـه است:

$$\mathrm{Var}(r_N) = \mathrm{Var}(\varepsilon_N) \qquad (۳)$$

و یا به‌طور معادل:

$$R^2 = 1 - \frac{\mathrm{Var}(\varepsilon_N)}{\mathrm{Var}(r_N)} = 1 - 1 = 0 \qquad (۴)$$

بنابراین شـواهد تجربـی کـه $R^2 \neq 0$ در جهـت خـلاف کـارایی بـازار بـوده و شواهدی که $R^2 = 0$ هم با کارایی بازار و هم با وجود ساختار غیرخطـی موافـق است و همخوانی دارد.

چون تابع توزیع احتمال[1] سری زمانی مانده‌ها و سـری زمـانی اصـلی نـامعین است، R^2 با رابطه زیر براورد می‌شود:

$$\hat{R}^2 = 1 - \frac{\hat{\mathrm{Var}}(\varepsilon_N)}{\hat{\mathrm{Var}}(r_N)} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$\hat{\mathrm{var}}(r_N) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(r_n - \hat{r})^2}{N-1}, \quad \hat{\mathrm{var}}(\varepsilon_N) = \frac{\sum_{n=1}^{N}(r_n - \bar{r})^2}{N-1}, \quad \bar{r}_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} r_n}{N} \qquad (۶)$$

در این رابطه $\hat{R}^2$ یا بازده تخمین، به‌عنوان معیاری برای خوبی مدل اسـتفاده می‌شود، در واقع $\hat{R}^2$ جزیی از انحرافات کل است که توسط مدل خطی بیان شده است.

1- Probability Density Function.

۴- پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس مدل بلاک و شولز

از مهم‌ترین پیشرفت‌ها در بازارهای مالی نوین، مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلاک و شولز[۱] (BSOPM) است[۲]. در این مدل فرض بر آنست که واریانس بازده سهام معین است.

یکی از فرضیه‌های اساسی در به‌دست آوردن مدل قیمت‌گذاری بلاک و شولز[۳] آنست که قیمت سهام مورد نظردارای توزیع log-normal با نوسانات ثابت باشد. اگر فرض ثابت بودن نوسانات برقرار نباشد ولی این نوسان‌ها از یک تابع معین (حتی متغیر با زمان) پیروی کند[۴]، اساس بازیابی این مدل تغییری نخواهد کرد و در این صورت نوسانات لحظه‌ای در مدل اصلی B&S به صورت متوسط نوسانات لحظه‌ای لحاظ می‌شود.

۴-۱- مدل پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی

در معادلات دیفرانسیل تصادفی، دو نوع ماهیت تصادفی می‌توان در نظر گرفت، گروهی از این معادلات دارای حل مشتق‌پذیر و گروهی دیگر مشتق‌ناپذیرند. هر یک از این دو گروه راه حل‌هایی را ارائه می‌دهند که با یکدیگر به‌طور اساسی متفاوتند.

گروه اول، راه حل‌های ساده‌تری داشته و شامل معادلات دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی یا مقدار اولیه تصادفی یا ورودی‌ای تصادفی با خواص منظم و معین و یا حتی ترکیبی از حالات مذکورند. به‌عنوان مثال معادله دیفرانسیل خطی زیر:

$$\dot{x}(t)=\frac{dx(t)}{dt}=a(\omega)x(t)+b(t,\omega) \qquad (۷)$$

که b ورودی تصادفی است و به‌ازای هر ω نسبت به زمان پیوسته است. این معادله با مقدار اولیه $x_0(\omega)$ در $t=0$ دارای حلی به شکل زیر است:

1- Black and Schols Option Pricing Model (BSOPM).
2- Black, F. and Scholes, M., (1973).
3- B&S.
4- Brockman, P. and et. al., (1997).

$$x(t,\omega) = e^{a(\omega)t}(x_0(\omega) + \int_0^t e^{-a(\omega)s} b(s,\omega)ds) \qquad (۸)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود جواب‌های به‌دست آمده از حل این معادله توابعی مشتق‌پذیر نسبت به زمان *t* هستند. دومین طبقه یا گروه، معادلاتی هستند که ورودی آنها، فرایندی تصادفی نامنظم مانند نویز سفیدگوسی[1] است. این معادلات به‌عنوان معادلات دیفرانسیل تصادفی محسوب می‌شوند و به صورت معادلات با انتگرال‌های تصادفی ایتو و یا استراتنوویچ[2] بیان می‌شوند. این‌گونه معادلات دارای حلی مشتق‌پذیر نیستند (به‌خاطر وجود جملاتی بر حسب فرایندهای وینر در انتگرال تصادفی مربوطه). فرایند Ito نمونه‌ای از این گروه است.

مدل‌های تصادفی دارای دو قسمت اصلی هستند. یک قسمت نشان‌دهنده متوسط تغییرات یا لغزش[3] در هر لحظه است وقسمت دیگر نوسانات لحظه‌ای فرایند را مدل می‌کند:

$$dx(t) = m(x(t), t)dt + s(x(t), t)\,dz(t) \qquad (۹)$$

در بیشتر مدل‌ها مؤلفه لغزش با استفاده از روش‌های عددی برای تطابق با نقطه اولیه به‌دست می‌آید ضمن این‌که برای تعداد کمی از مدل‌ها یک رابطه تحلیلی نیز موجود است[4].

۴-۲- فرایند Ito

در مدل‌سازی به روش معادلات دیفرانسیل تصادفی، رفتار فرایند مورد مطالعه به‌عنوان یک فرایند Ito در نظر گرفته می‌شود.

در این تحقیق قیمت سهام به‌عنوان یک فرایند Ito در نظر گرفته می‌شود. یک فرایند Ito $x = \{x(t); t \geq 0\}$ به شکل عمومی زیر است:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a(s,x(s))ds + \int_0^t b(s,x(s)d\omega(s); t \geq 0 \qquad (۱۰)$$

1- Guassian White Noise.
2- Stranovich Integrals.
3- Drift.
4- Oksendal, B., (1991).

این رابطه شامل مقدار اولیه $x(to)=xo$ است که امکان دارد تصادفی بوده، دارای یک مؤلفه متغیر با زمان با تغییرات آهسته به‌نام لغزش و یک مؤلفه تصادفی پیوسته با تغییرات سریع با زمان به‌نام پخش[1] است. انتگرال دوم در معادله فوق یک انتگرال تصادفی *Ito* نسبت به فرایند وینر $\omega=\{\omega(t);t\geq 0\}$[2] نامیده می‌شود. معادله انتگرال فوق، اغلب به شکل دیفرانسیل زیر نوشته می‌شود:

$$dx(t)=a(t,x(t))dt+b(t,x(t)d\omega(t)\,;\,t\geq 0 \qquad (۱۱)$$

به معادله فوق، معادله دیفرانسیل تصادفی گفته می‌شود[3]، حل معادله دیفرانسیل تصادفی عموماً پیچیده بوده و تنها حالات خاصی وجود داردکه راه حل‌های آنها شناخته شده است. با وجود راه حل‌های عمومی ارائه شده توسط محققان، فاصله بین پیشرفت‌های نظری معادلات دیفرانسیل تصادفی با کاربرد عملی آن بسیار زیاد است.

فرایند وینر $\omega(t)$ در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین جمله دوم درمعادله انتگرالی (۱۱) مانند یک انتگرال لبگ[4] و یا انتگرال ریمان[5] معمولی نیست و روابط معادلات مربوط به انتگرال‌گیری آن با انتگرال‌های متداول ذکر شده متفاوت است به‌طوری‌که:

$$\int_0^t W(s,\omega)dW(s,\omega)=\frac{1}{2}W^2(t,\omega)-\frac{1}{2}t \qquad (۱۲)$$

در حالی‌که در انتگرال لبگ داریم:

$$\int_0^t W(s)dW(s)=\frac{1}{2}W^2(t) \qquad (۱۳)$$

خاصیت بسیار مهمی که یک فرایند وینردارد به صورت $E[(d\omega(t))^2]=dt$ است، با وجود این خاصیت برای هر $t\geq t_0$ می‌توان فرایند تصادفی $Y(t)$ را به شکل زیر تعریف کرده و از آن دیفرانسیل‌گیری کرد:

1- Fusion.

۲- فرآیند وینر انتگرال نویز سفید است و به فرآیند براونی نیز نامیده می‌شود.

3- SDE.

4- Lebesgue Integral.

5- Riman Integral.

$$Y(t,\omega) = U(t, x(t,\omega)) \quad (۱۴)$$

که $U(t,x)$ تابعی پیوسته دارای مشتق جزیی مرتبه دوم و $x(t)$ نیز انتگرال Ito است، در واقع:

$$x(t,\omega) = \int_{t_0}^{t} f(s,\omega)dW(s,\omega)$$

و یا به‌صورت معادله دیفرانسیلی:

$$dx(t) = f(t,\omega)d\omega(t)$$

با استفاده از قاعده زنجیری[1] در دیفرانسیل‌گیری $Y(t)$ می‌توان نوشت:

$$dY(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))dx(t)$$

$$\Delta Y(t) = u(t+\Delta t, x(t)+\Delta x(t)) - u(t,x(t)) =$$

$$\{\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\} + \frac{1}{2}\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\Delta t \Delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Delta x)^2\} + O(3)$$

$$dY(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,x(t))dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t,x(t))dx(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x(t))dx^2(t) \quad (۱۵)$$

این رابطه، قاعده زنجیری در معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده و به نام فرمول Ito نامیده می‌شود. با توجه به معادله دیفرانسیل (۱۵) جمله‌ای اضافی که در قاعده زنجیری معمولی وجود ندارد در این رابطه دیده می‌شود.

۴-۳- قیمت سهام

با در نظر گرفتن نوسانات شبه تصادفی در قیمت سهام در بازار بورس، مدل کردن دینامیک قیمت‌ها با استفاده ازمعادلات دیفرانسیل تصادفی، به‌نظر طبیعی می‌رسد. مرتن[2] یکی از اولین کسانی است که از این نظریه استفاده کرد. مدل پیشنهادی او شامل ایده‌های اساسی بود که در حال حاضر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. مرتن شخص سرمایه‌گذاری را در نظر گرفت که دو نوع استراتژی سرمایه‌گذاری را انتخاب کرده یکی سرمایه‌گذاری با ریسک ودیگری بدون ریسک. شخص سرمایه گذار باید انتخاب خود را به‌گونه‌ای انجام دهد که تابع هزینه‌ای را کمینه کند و یا این‌که تابع درآمدی را بیشینه کند. مرتن ارزش سرمایه‌گذاری

1- Chain Rule.
2- Merton, R., (1973).

بدون ریسک (P_S) را به‌طور نمایی افزایشی با زمان فرض کرد (مانند سپرده با سود ثابت تضمینی) که با معادله دیفرانسیل معمولی زیر بیان می‌شود:

$$\dot{P}_S = rP_S \,;\, r \succ 0 \qquad (۱۶)$$

سرمایه‌گذاری با وجود ریسک در مدل پیشنهادی مرتن (P_r) در معادله‌ای مشابه با معادله فوق صدق کرده با این تفاوت که این معادله شامل نوسانات تصادفی متناسب با شدت نوسانات قیمت در نظر گرفته می‌شود یعنی:

$$\dot{P}_r = \alpha P_r + \sigma P_r \zeta_t \qquad (۱۷)$$

که ζ_t یک فرایند نویز سفیدگوسی بوده و به صورت یک معادله دیفرانسیل تصادفی Ito به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$dP_t^r = \alpha P_t^r\, dt + \sigma P_t^r\, dW_t \qquad (۱۸)$$

که $\{W_t; t \geq 0\}$ یک فرایند وینر استاندارد است. α و σ ثوابت مثبتی بوده و چون سرمایه‌گذاری با وجود ریسک حداقل در صورت احتمال موفقیت پرمنفعت‌تر از سرمایه‌گذاری بدون ریسک است $r \prec \alpha$. در این معادله α بازده مورد انتظار لحظه‌ای سهام، σ واریانس لحظه‌ای نرخ بازده و dW_t یک فرایند وینر - گوس استاندارد است. α می‌تواند متغیری تصادفی باشد که به قیمت سهام یا بازده سرمایه‌های دیگر بستگی داشته باشد. σ متغیری غیرتصادفی فرض می‌شود. σ می‌تواند مقدار ثابتی نباشد و مثلا تابعی شناخته شده از زمان باشد.

برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی فوق ابتدا تغییر متغیر $Y_t = U(P_t) = \log(P_t)$ را داده و سپس با استفاده از قانون دیفرانسیل‌گیری معادلات دیفرانسیل تصادفی و به‌کارگیری فرمول ایتو می‌توان نوشت:

$$dY_t = \frac{\partial U}{\partial t}(t, P_t)dt + \frac{\partial U}{\partial P_t}(t, P_t)dP_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial {P_t}^2}(t, P_t){dP_t}^2$$

$$\begin{aligned} d{P_t^r}^2 &= (\alpha P_t^r\, dt + \sigma P_t^r\, dW_t)^2 \\ &= \alpha^2 {P_t^r}^2\, dt^2 + 2\alpha P_t^r \sigma P_t^r dt\, dW_t + \sigma^2 {P_t^r}^2 {dW_t}^2 \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با توجه به روابط موجود در ریاضیات مربوط به معادلات دیفرانسیل تصادفی،

می‌توان نوشت:

$$<dt, dt> = <dW_t, dt> = 0 ; <dW_t, dW_t> = dW_t^2 = dt \qquad (۲۰)$$

در این صورت رابطه (۱۹) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$dP_t^{r\,2} = 0 + 0 + \sigma^2 P_t^{r\,2} dW_t^2 = \sigma^2 P_t^{r\,2} dt \qquad (۲۱)$$

و به همین ترتیب می‌توان نوشت:

$$dY_t = d(\log P_t^r) = 0 + \frac{dP_t^r}{P_t^r} - \frac{1}{2}\frac{1}{P_t^{r\,2}}\sigma^2 P_t^{r\,2} dt = \frac{dP_t^r}{P_t^r} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$\frac{dP_t^r}{P_t^r} = \alpha dt + \sigma\, dW_t$$

$$d(\log P_t^r) = \alpha\, dt + \sigma\, dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma\, dW_t \qquad (۲۲)$$

بنابر این می‌توان نوشت:

$$\Delta(\log P_t^r) = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - t_0) + \sigma(W_t - W_{t-1}) \qquad (۲۳)$$

برای $t_0 = 0$ و $P(t_0) = P_0$ خواهیم داشت:

$$P_{t-1} = P_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-1) + \sigma W_{t-1}} \quad , \quad P_t = P_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \qquad (۲۴)$$

و بالاخره از تقسیم دو رابطه فوق فرمول مبین قیمت سهام بر اساس مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = e^{[(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t] - [(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-1) + \sigma W_{t-1}]}$$

$$= e^{[(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2) + \sigma(W_t - W_{t-1}]}$$

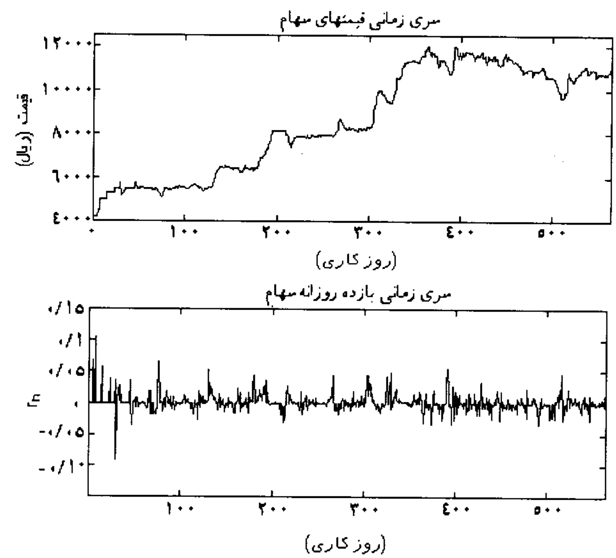
$$P_t = P_{t-1} e^{[(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t - W_{t-1}]} \qquad (۲۵)$$

۵- نتایج حاصل از شبیه‌سازی

در اینجا نتایج حاصل از پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از مدل‌های خطی و مدل‌های معادلات دیفرانسل تصادفی ارائه می‌شود. ابتدا پیش‌بینی قیمت روز بعد شبیه‌سازی شده و سپس افق پیش‌بینی را به اندازه ۱۵ و ۳۰ افزایش می‌دهیم، در هر مورد عملکرد مدل با مقادیر واقعی مقایسه شده‌اند. نرخ بازدهی روزانه[1] سهام شرکت شهد- ایران (r_n) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_n = \frac{P_n - P_{n-1} + d_n}{P_{n-1}}$$

در این رابطه P_n قیمت در روز nام و d_n سود تقسیم شده در این روز است، سود مزبور ممکن است به‌صورت پرداخت نقدی، سهام جایزه یا افزایش سرمایه باشد. شکل (۱-الف) و (۱- ب) به‌ترتیب، قیمت سهام شهد- ایران و نرخ بازدهی روزانه این سهم را نشان می‌دهد.



نمودار ۱-الف و ۱-ب- نمودار قیمت سهام شهد- ایران و نرخ بازدهی روزانه (r_n)

1- One Day Return.

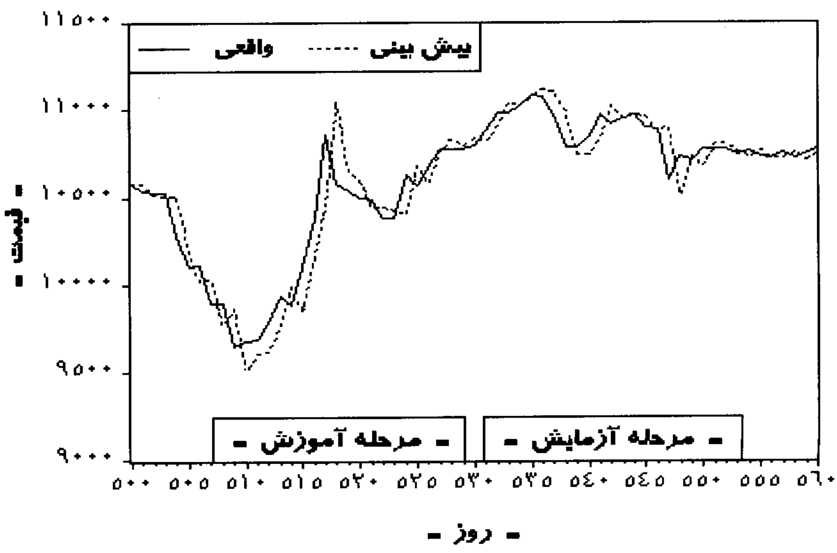
۵-۱- مدل خطی: پیش‌بینی یک مرحله بعد قیمت و بازده روزانه سهام شهد- ایران

برای مدل‌سازی خطی با ساختار ARMA(p, q)، در صورت ایستا نبودن سری زمانی با استفاده از عملگر تفاضل با درجه d سری زمانی جدیدی ساخته می‌شود (متناظر با مدل خطی با ساختار ARIMA(p, d, q)). باید توجه کرد که حداقل d به‌دست آمده برای ایستا کردن سری زمانی، لزوماً بهترین مدل و براورد را به‌دست نمی‌دهد و معمولاً برای داشتن مدلی با بازده براورد بالاتر و کارایی بیشتر به d>dmin احتیاج است. در اینجا، بهترین مدل به‌دست آمده برای قیمت دارای ساختار ARIMA(3, 3, 2) بوده و می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\hat{\nabla}^3 P_t = -1.480651\nabla^3 P_{t-1} - .924503\nabla^3 P_{t-2} - .351964\nabla^3 P_{t-3} \\ - .159362 e_{t-1} - .828186 e_{t-2} \qquad (۲۶)$$

که $\nabla^3 Pt$ برابر است با: $\nabla^3 P_t = P_t - 3P_{t-1} + 3P_{t-2} - P_{t-3}$

پارامترهای براوردیی و مشخصات آماری این مدل در جدول ۱ آمده است. شکل ۲ مشاهدات سری زمانی قیمت شهد- ایران و خروجی‌های مدل را در مرحله آموزش و آزمایش نشان می‌دهد.

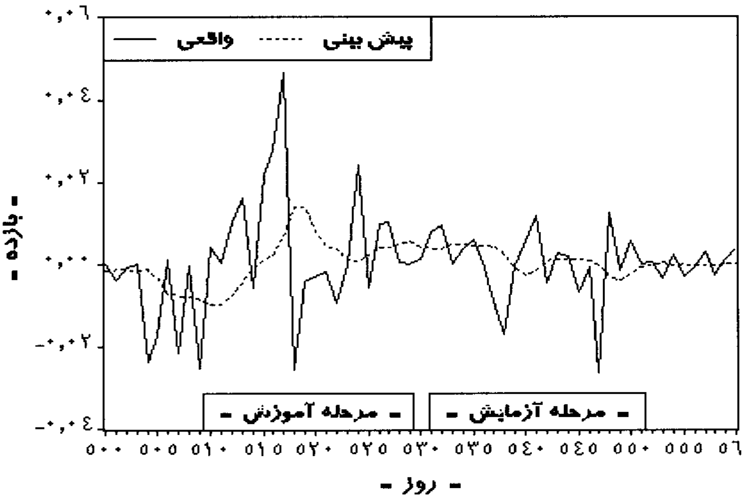


نمودار ۲- پیش‌بینی قیمت روز بعد با استفاده از مدل خطی با ساختار ARIMA(3, 3, 2)

جدول ۱- ضرایب و مشخصات آماری مدل خطی تخمینی قیمت شهد- ایران

LS // Dependent Variable is D(SH,۳)				
Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob
AR(۱)	-۱.۴۸۰۶۵۱	۰.۰۸۷۱۸۸	-۱۶.۹۸۲۳۷	۰.۰۰۰۰
AR(۲)	-۰.۹۲۴۵۰۳	۰.۰۷۹۶۹۷	-۱۱.۶۰۰۲۴	۰.۰۰۰۰
AR(۳)	-۰.۳۵۱۹۶۴	۰.۰۴۴۹۶۵	-۷.۸۲۷۴۹۳	۰.۰۰۰۰
MA(۱)	-۰.۱۵۹۳۶۲	۰.۰۷۶۴۸۹	-۲.۰۸۳۴۴۵	۰.۰۳۷۷
MA(۲)	-۰.۸۲۸۱۸۶	۰.۰۸۲۵۳۳	-۱۰.۰۳۴۶۶	۰.۰۰۰۰
R-squared	۰.۷۷۵۳۷۴	Mean dependent var	-۰.۶۰۷۲۸۷	
Adjusted R-squared	۰.۷۷۳۵۳۶	S.D. dependent var	۲۶۱.۰۲۱۱	
S.E. of regression	۱۲۴.۲۱۵۳	Akaike info criterion	۹.۶۵۴۱۰۲	
Sum squared resid	.۷۵۴۴۹۹۴	Schwartz criterion	۹.۶۹۶۶۳۸	
Log likelihood	-۳۰۸۰.۵۱۹	F-statistic	۴۲۱.۹۸۷۱	
Durbin-Watson stat	۲.۰۹۷۳۹	Prob(F-statistic)	۰.۰۰۰۰۰۰	
Inverted AR Roots	-.۳ - .۵۶i	-.۳ + .۵۶i	-.۸۹	
Inverted MA Roots	.۹۹	-.۸۳		

با بررسی توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزیی باقیمانده‌های مدل قیمت (۲و۳و۳)ARIMA به ازای ۲۵ تأخیرو قرارداشتن مقادیر این توابع در زیر حد فاصل مرسوم می‌توان نتیجه گرفت خطای براورد تصادفی بوده و در نتیجه برازش مدل به‌خوبی صورت گرفته است. در واقع، طبق آمار کلاسیک می‌توان انتظار داشت که ساختار خطی بجا مانده‌ای در سری زمانی باقیمانده‌های قیمت در این مدل وجود ندارد. به‌همین ترتیب مدل تخصیص یافته به فرایند مولد سری زمانی بازده سهام شهد- ایران دارای ساختار(۳و۲و۲)ARIMA خواهد بود که به‌خاطر ایجاز، از آوردن جدول مربوطه صرفنظر می‌شود. مشاهدات سری زمانی بازده شهد- ایران و خروجی‌های مدل در دو مرحله آموزش و آزمایش در شکل۳ رسم شده است.



نمودار ۳- پیش‌بینی بازده روز بعد سهام شهد- ایران، با استفاده از مدل خطی با ساختار ARIMA(2, 2, 3)

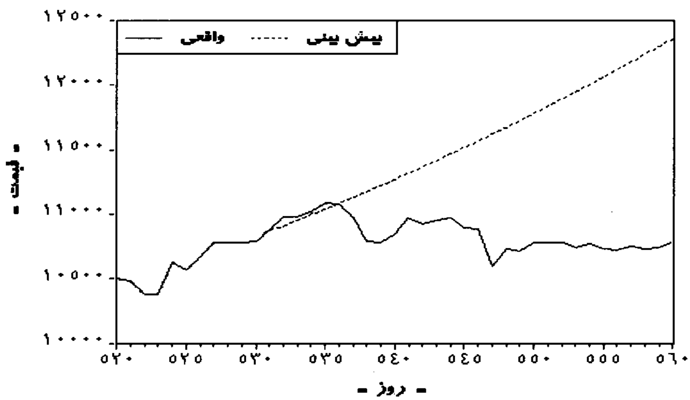
مقدار R^2 در مرحله آموزش $R^2 = 0.45$ و در مرحله آزمایش $R^2 = 0.4$ است.

۵-۲- مدل خطی: پیش‌بینی دراز مدت قیمت و بازده سهام شهد- ایران

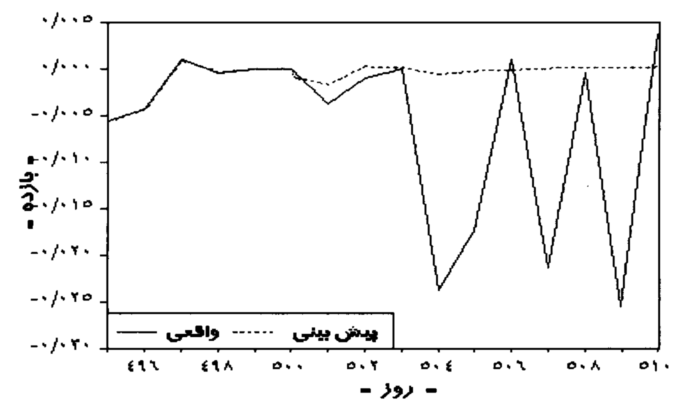
پیش‌بینی‌های صورت گرفته با مدل‌های تخصیص یافته فوق و شکل‌های مندرج در قسمت‌های قبل مربوط به پیش‌بینی قیمت مرحله زمانی بعد و بازده مرحله زمانی بعد است. از آنجایی که در این پژوهش از اطلاعات روزانه استفاده شده است، پیش‌بینی قیمت روز[1] بعد و بازده روز بعد سهم صورت گرفته است، این پیش‌بینی با توجه به زمانبری فرایند خرید و یا فروش سهام در بازار بورس تهران ممکن است چندان مفید نباشد، در مدل‌های به‌دست آمده، پیش‌بینی روز $k+1$ براساس اطلاعات واقعی در زمان‌های $k, k-1, k-2, \ldots$ صورت می‌گیرد، در حالی‌که اگر شناسایی فرایند مولد سری زمانی صورت گرفته باشد رفتار فرایند با وجود ورودی‌ها وشرایط اولیه کاملا مشخص شده و در مرحله

1- Next Price.

پیش‌بینی نیازی به اطلاعات واقعی روزهـای آتـی نخواهـد بـود. در واقـع اگـر از مدل‌های به‌دست آمده برای پیش‌بینی با افق بیشتر از یک مرحله اسـتفاده شـود، برای $k+T$ لازم است در مدل‌های مربوطـه تنهـا از اطلاعـات بـراوردی خروجـی استفاده شود. یعنی در طی فرایند رو به جلو پـیش‌بینـی، از خروجـی‌هـای مـدل خطی (بجای مقادیر واقعی) استفاده شود، شکل‌های ۴ و ۵ به‌ترتیب نشان‌دهنـده عملکرد مدل‌های به‌دست آمده قیمت و بازده سهام با افق پیش‌بینـی بـرای ۱۰ و ۲۰ روز است.



نمودار ۴- پیش‌بینی قیمت ۳۰ روز آینده سهام شهد- ایران با استفاده از مدل خطی



نمودار ۵- پیش‌بینی بازده سهام شهد- ایران در ۱۰ روز آینده با استفاده از مدل خطی

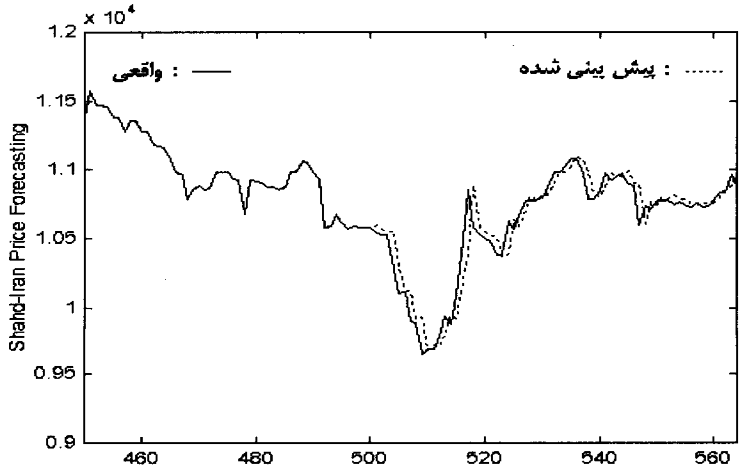
دیده می‌شود که مدل‌های به‌دست آمده به حالت‌های اولیه (قیمت وبازده تخمینی گذشته) بسیار حساس هستند به‌طوری‌که مقداری خطا در براورد قیمت (بازده) روز بعد خطای بسیار زیادی را پیش‌بینی‌های روزهای بعد ایجاد می‌کند، در بررسی‌های انجام شده، نشان داده شده است که مدل‌های خطی کارایی لازم برای فرایند پیش‌بینی دراز مدت را ندارند. پیچیده‌تر کردن مدل مورد مطالعه نیز بهبود قابل ملاحظه‌ای در پیش‌بینی درازمدت حاصل نمی‌کند می‌توان ادعا کرد که مدل‌های خطی، به‌خاطر پیچیدگی فرایند مولد سری زمانی، قادر به بازسازی و احیای دینامیک فرایند مربوطه نبوده و برای پیش‌بینی درازمدت کارآیی لازم را ندارند. این‌گونه رفتار، شبهه آشوبگونه[1] و شبه تصادفی بودن فرایند مولد قیمت (بازده) را ایجاد می‌کند (خالوزاده و دیگران ۸۰ و ۱۳۷۷).

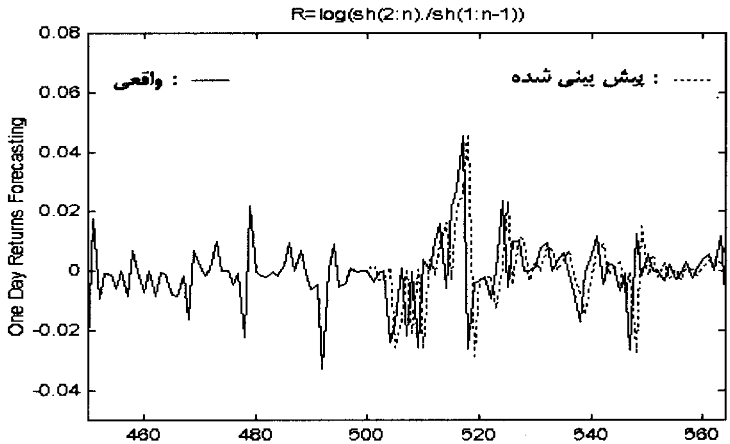
۵-۳- مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی: پیش‌بینی یک مرحله بعد قیمت و بازده روزانه سهام شهد- ایران

با استفاده از سری زمانی مربوط به بازده روزانه سهام، σرا برابر با انحراف معیار سری زمانی مربوطه و α را نیزبرابر با میانگین سری زمانی بازده روزانه در نظر گرفته و شبیه‌سازی‌های مربوط را انجام می‌دهیم. شکل‌های (۶-الف) و (۶-ب) به‌ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت روز بعد سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی یک روز حاصل شده است. برای مقایسه بهتر در هر مورد مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.

مقدار R^2 برای سری زمانی قیمت عبارت است از: $R^2 = 0.86$ و برای سری زمانی بازده عبارت است از $R^2 = 0.81$.

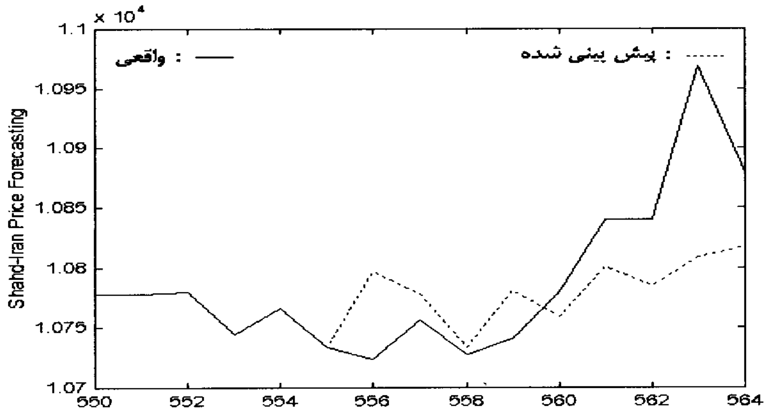
1- Chaotic.

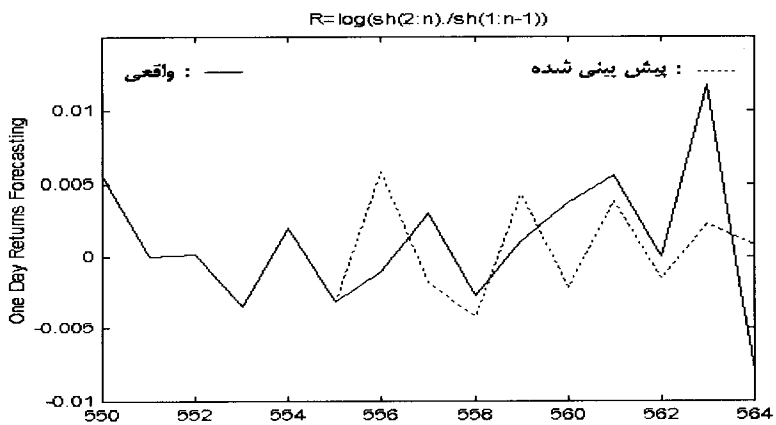




نمودارهای ۶- الف و ۶- ب- پیش‌بینی قیمت روز بعد سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

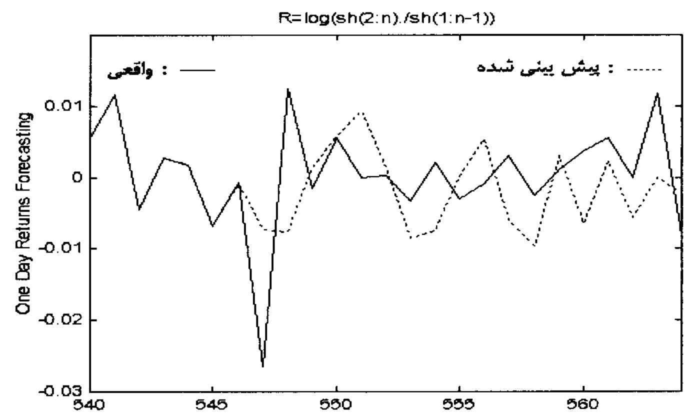
شکل‌های (۷- الف) و (۷- ب) به‌ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی ۱۵ روز حاصل شده است. برای مقایسه، مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.





نمودارهای ۷- الف و ۷- ب- پیش‌بینی قیمت سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) با افق پیش‌بینی ۱۵ روز با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

شکل‌های (۸- الف) و (۸- ب) به‌ترتیب نشان‌دهنده پیش‌بینی قیمت سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) بوده که از حل معادله دیفرانسیل تصادفی ذکر شده با افق پیش‌بینی ۲۵ روز حاصل شده است. برای مقایسه در هر مورد مقدار واقعی متناظر نیز رسم شده است.



نمودارهای ۸- الف و ۸- ب- پیش‌بینی قیمت سهام شهد- ایران و پیش‌بینی نرخ بازدهی روزانه (r_n) با افق پیش‌بینی ۲۵ روز با استفاده از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی

۶- نتیجه‌گیری

در این قسمت با استفاده از ریاضیاتی خاص که به معادلات دیفرانسیل تصادفی معروف است، مدل‌سازی قیمت سهام صورت پذیرفت. با استفاده از اطلاعات مربوط به قیمت (بازده) شرکت شهد- ایران، نشان داده شده که با به‌کارگیری مدل‌های خطی می‌توان با خطای کمی قیمت (بازده) روز بعد را پیش‌بینی کرد. لیکن مدل‌های به‌دست آمده به حالت‌های اولیه (قیمت و بازده براوردی گذشته) بسیار حساس هستند به‌طوری‌که مقداری خطا در براورد قیمت

(بازده) روز بعد خطای بسیار زیادی را پیش‌بینی‌های روزهای بعد ایجاد می‌کند، پس مدل‌های خطی کارایی لازم را برای فرایند پیش‌بینی دراز مدت ندارند. پیچیده‌تر کردن مدل مورد مطالعه نیز بهبود قابل ملاحظه‌ای در پیش‌بینی درازمدت حاصل نمی‌کند. در مقابل پیش‌بینی بر اساس مدل‌های تصادفی چون از واریانس و میانگین (گشتاورهای مرتبه اول و دوم) سری زمانی در فرایند پیش‌بینی استفاده می‌شود عملکردی بهتری داشته و بر خلاف مدل خطی در پیش‌بینی دراز مدت به نقاط ثابت و یا خطوطی با شیب ثابت همگرا نمی‌شوند.

فهرست منابع

۱- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۸۰)، *بررسی روند نوسانات قیمت سهام در بازار بورس*، کنفرانس بین‌المللی مهندسی برق ایران، دانشگاه صنعت آب و برق، تهران.

۲- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، *آیا قیمت سهام در بازار بورس تهران قابل پیش‌بینی است؟ (کاربرد موردی تحلیل R/S برای سهام شهد-ایران)*، مجله تحقیقات مالی، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.

۳- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، *پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس تهران با استفاده از مدل‌های خطی و غیر خطی*، مجله علمی-پژوهشی مدرس، دانشگاه تربیت مدرس.

۴- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، لوکس، کارو، (۱۳۷۷)، *نگرشی نو به قابلیت پیش‌بینی قیمت سهام در بازار بورس تهران*، مجله علمی-پژوهشی تحقیقات اقتصادی، دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران.

۵- خالوزاده، حمید، خاکی صدیق، علی، (۱۳۸۲)، *ارزیابی روش‌های پیش‌بینی‌پذیری قیمت سهام و تعیین میزان قابلیت پیش‌بینی در بازار بورس تهران*، مجله علمی-پژوهشی مدرس، دانشگاه تربیت مدرس.

۶- خالوزاده، حمید، (بهمن ۱۳۷۷)، *مدل‌سازی غیرخطی و پیش‌بینی رفتار قیمت سهام در بازار بورس تهران*، رساله دکتری، دانشگاه تربیت مدرس.

7- Akgiray, V. , (1989), "Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts", V. 62, p: 55-80.

8- Bailey, W. and DeGennaro, R. , (1990), "Stock Returns and Volatility",

Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2, p: 204-214.
9- Black, F. and Scholes, M. , (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, 637-59.
10- Brock, W. A. , Dechert, W. , Scheinkman, J. , (1987), "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension", Working Paper, Madison, University of Wisconsin, University of Houston, University Chicago.
11- Brockman, P. and et. al. , (1997), *Deterministic Versus Stochastic Volatility: Implications for Option Pricing Models.*
12- Chou, R. Y. , (1988), "Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH", *Journal of Applied Econometrics*, 3, p: 279-294.
13- Dhillon U. and Johnson, H. , (1991), "Changes in the Standard and Poor,s 500 list", *Journal of Business*, 64, p: 75-85.
14- French, K. R. , Schwert, G. and Stambaugh, F. , (1987), "Expected Stock Returns and Volatility", *Journal of Financial Economics*, v19(1), p: 3-30.
15- Grassberger P. , Procaccia I. , (1983), "Characterization of Strange Attractors", *Phys. Review Letters*, 50: p: 3460- 3490.
16- Heynen, R. , (1993), "An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns", *Review of future markets*, 13, p:317-353.
17- Hull, J. and White, A. , (1987), "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities", *Journal of Finance*, 42, p: 381-400.
18- Khaloozadeh, H. , Khaki Sedigh, A. , (2001), "Long Term Prediction of Tehran Price Index (TEPIX) using Neural Networks", *IFSA/NAFIPS*, Vancouver, Canada, p:563:567.
19- Khaloozadeh, H. , Khaki Sedigh, A. , (2004), "On the Predictability of Tehran Price Index (TEPIX)", 3rd, Internation Conference on System Identification and Control Problems (SICPRO,04), Moscow, Russia.
20- Merton, R. , (1973), "Theory of Rational Option Pricing", *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 4, p: 141-83.
21- Oksendal, B. , (1991), *Stochastic Differential Equations*, 3rd Edition, Springer-Verlag.
22- Schweppe, F. C. , (1973), *Uncertain Dynamic Systems,* Prentice-Hall.
23- Soderstrom, T. and Stoica, P. , (1989), *System Identification*, Prentice-Hall.
24- Stein E. M. and Stein, J. C. , (1991), "Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach", *Review of Financial Studies*, 4, p: 727-752.
25- Takens, F. , (1980), *Detecting Strange Attractors in Tubrulence,* Springer-Verlag, Berlin.