

## تحلیل سیکل‌های تجاری ایران با استفاده از نظریه موجک‌ها

حسین عباسی نژاد

دانشیار دانشکده اقتصاد دانشگاه تهران habasi@ut.ac.ir

شاپور محمدی

استادیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران Shmohammadi@gmail.com

تاریخ دریافت: ۸۴/۹/۲۳ تاریخ تصویب: ۸۴/۱۱/۴

### چکیده

تجزیه سری‌های زمانی به سیکل‌های مختلف و تحلیل آن‌ها در دامنه زمان و فراوانی اغلب با استفاده از روش‌های اقتصادسنجی سری زمانی و سری‌های فوریه انجام می‌پذیرد. علاوه بر این روش‌ها، فیلترهایی مانند فیلتر هودریک-پرسکات، باکستر-کینگ و کریستیانو-فیتزجرالد، برای تجزیه سری‌های زمانی در اقتصاد به کار گرفته می‌شوند. در این‌جا، از روش دیگری به نام نظریه موجک‌ها که توانایی تجزیه سری‌های زمانی با مقیاس‌های مختلف را دارد، به منظور تجزیه تولید ناخالص داخلی ایران استفاده می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهند که روش موجک در شرایط تغییرات هموار سری‌های زمانی، تفاوت زیادی با روش هودریک-پرسکات ندارد و برای تشخیص سیکل‌ها در سری‌های زمانی با تغییرات ناگهانی، بهتر از روش‌های دیگر عمل می‌کند. همچنین تحلیل موجک، علاوه بر سیکل‌ها، اطلاعات بیشتری در اختیار قرار می‌دهد. نتایج تجزیه تولید ناخالص داخلی ایران با استفاده از تبدیل موجک، نشان می‌دهند که ۸ سیکل ۳۲-۱۶ فصلی و ۱۴ سیکل ۱۶-۸ فصلی وجود دارد. همچنین تحلیل نوسان نشان می‌دهد که تغییر زیادی در واریانس ضرایب موجک در دوران پیش از جنگ با جنگ وجود ندارد اما در دوران پس از جنگ، نوسان تولید ناخالص داخلی افزایش یافته است.

طبقه‌بندی JEL: C14, C22, C19, E32.

کلید واژه: سیکل‌های تجاری، نظریه موجک‌ها، فیلتر هودریک-پرسکات، فیلتر باکستر-کینگ، سری‌های زمانی، تحلیل فوریه.

## ۱- مقدمه

تحلیل سری‌های زمانی و تجزیه آن‌ها به سیکل‌های کوتاه و بلندمدت، در اقتصاد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مطالعات مختلفی در زمینه کاربرد نظریه موجک‌ها ارائه شده‌اند. در زمینه حباب‌های بازار سهام و حافظه طولانی بازار، کرمن و تیسیر<sup>۱</sup>، از نظریه موجک‌ها بهره می‌گیرند. به وسیله آنتونیو و ورلو<sup>۲</sup> در تحقیقی، شاخص سهام لندن FTSE100 با استفاده از تبدیل موجک نوفه‌زدایی شده مورد تحلیل قرار می‌گیرد. کیم، یو و سونگ<sup>۳</sup> به پیش‌بینی قیمت نهایی برق با استفاده از تحلیل موجک می‌پردازند. مولیگان و لامباردو<sup>۴</sup>، تحلیل موجک را در کنار سایر روش‌ها، برای تحلیل میزان کارایی بازار سهام و دقت آن در قیمت‌گذاری سهام به کار می‌برند. تحلیلی در درباره چگونگی مدل‌سازی رگرسیون کاذب در فرآیندهای با حافظه طولانی در فن و ویچر<sup>۵</sup> ارائه می‌شود. مارک جنسن<sup>۶</sup>، در دو بررسی جداگانه، توان تبدیل موجک را برای تخمین مرتبه هم‌انباشتگی فرایندهای با حافظه طولانی برای روش حداقل مربعات معمولی و روش حداکثر درست‌نمایی مورد بررسی قرار داده‌اند که نتیجه آن‌ها، موید افزایش توان این دو روش با استفاده از تبدیل موجک است. کونر و روزیترا<sup>۷</sup>، به بررسی بازار قیمت‌های کالاها با استفاده از تبدیل موجک می‌پرداخته‌اند. در این مقاله، به تبعیت از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌ها، تاثیر حضور خریداران و فروشندگان ناهمگن<sup>۸</sup> از نظر افق زمانی سرمایه‌گذاری با استفاده از مقیاس، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. ارتباط بین متغیرهای کلان اقتصادی و

1- Kirman. and Teyssiere 2005.

2- Antoniou and Vorlow 2005.

3- Kim, Yu and Song 2002.

4- Mulligan and Lombardo 2004.

5- Fan and Whitcher 2003.

6- Jensen, M. 1999, 2000.

7- Connor and Rossiter, 2005.

۸- ناهمگن ترجمه Heterogeneous است. علت استفاده از این واژه در بازارهای مالی، این است که در

دهه‌های گذشته، بیشتر تحلیل‌ها براساس سرمایه‌گذار متوسط Average Investor یا Representative

Agent Framework انجام می‌گرفت.

متغیرهای مالی برای اقتصاد آمریکا، با استفاده از تحلیل طیفی و موجک در کیم<sup>۱</sup> و این مورد تحلیل قرار می‌گیرد. رمزی نیز در یک مرور کلی، کاربردهای مختلف موجک در اقتصاد و آینده آن را مورد تحلیل قرار داده است.<sup>۲</sup> ساختار مقاله به شرح ذیل است: بخش دوم به معرفی نظریه موجک‌ها و کاربردهای آن می‌پردازد. بخش سوم، به آرایه تحلیل مقایسه‌ای روش موجک و سایر روش‌ها، با استفاده از داده‌های تصادفی اختصاص یافته است. بخش چهارم مقاله، تجزیه داده‌های فصلی تولید ناخالص داخلی ایران را مورد بررسی قرار می‌دهد و بخش پایانی، به نتیجه‌گیری و آرایه پیشنهادات می‌پردازد.

## ۲- نظریه موجک‌ها<sup>۳</sup>

موجک‌ها توابع ریاضی‌اند که داده‌ها را به اجزای فراوانی (فرکانس)<sup>۴</sup> تفکیک کرده و هر جزء را با نمایش<sup>۵</sup> متناسب با مقیاس آن جزء، مطالعه می‌کنند. یکی از مزایای موجک‌ها، نسبت به روش‌های فوریه<sup>۶</sup> سنتی، توان بالای تحلیل آن‌ها در شرایطی است که سیگنال‌ها با گسستگی و جهش‌های سریع همراه‌اند. در نظریه موجک، اگر دامنه دید<sup>۷</sup> بزرگ باشد، ویژگی‌های کلی سری زمانی دیده خواهند شد و اگر دامنه دید کوچک شود، جزئیات مورد توجه بیشتری قرار خواهند گرفت. شاید جنگل و درخت، ساده‌ترین مثال برای این ویژگی موجک‌ها، باشند. بنابراین مقیاسی که در موجک‌ها برای تحلیل مورد استفاده قرار می‌گیرد، از اهمیت بالایی برخوردار است و الگوریتم‌های موجک، می‌توانند داده‌ها را با درجه وضوح مختلف پردازش کنند. در حقیقت، ایده اساسی در موجک‌ها، تحلیل بر

1- Kim and In 2003.

2- Ramsey 2002.

3- Wavelets.

4- Frequency component.

5- Resolution.

6- Fourier.

7- Window.

اساس مقیاس<sup>۱</sup> است. سال‌های متمادی، دانشمندان به دنبال توابعی به جز سینوس و کسینوس که مبنای تبدیل فوریه‌اند را جست و جو می‌کردند تا بتوانند تحلیل‌های موضعی<sup>۲</sup> انجام دهند. تغییرات ناگهانی و جهش‌ها، با تبدیل فوریه قابل تحلیل نیستند، اما تبدیل موجک می‌تواند وظیفه تقریب در دامنه محدود را به خوبی انجام دهد. به عبارت دیگر، موجک‌ها برای تقریب داده‌های با گسستگی‌های شدید، بسیار مناسب‌اند.

پیش از دهه ۱۹۳۰، موجک رشد زیادی نداشته و تحلیل فوریه که به وسیله ژوزف فوریه (۱۸۰۷) ارائه شده، در ریاضیات مورد استفاده بوده است. تحلیل فوریه بر تحلیل فراوانی تمرکز کرده و به دنبال تقریب توابع مختلف با عبارت‌های سینوس و کسینوس است.<sup>۳</sup>

فوریه نشان داد که می‌توان هر تابع مانند  $f(x)$  را که دارای دوره تناوب  $2\pi$  است، به صورت ذیل بسط داد:

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad ; \quad \alpha_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(jx) dx$$

$$; \beta_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(jx) dx$$

به عبارت دیگر، می‌توان هر تابع مانند  $f(x)$  را به صورت سری‌های فوریه آن بسط داد. البته در اقتصاد و اقتصادسنجی، تحلیل سری‌های زمانی، بیشتر در دامنه زمان<sup>۴</sup> به جای دامنه فرکانس<sup>۵</sup> انجام می‌شد، در حالی که در رشته‌هایی مانند برق، تحلیل دامنه فرکانس مرسوم است.<sup>۶</sup>

1- Scale.

2- Local.

3- Strang, 1993.

4- Time domain.

5- Frequency domain.

6- Chatfield 1984.

تبدیل فوریه یک سری زمانی مانند  $y(t)$  به جای  $f(x)$  جذابیت بیشتری در تحلیل سری زمانی و اقتصاد دارد، که تفاوت چندانی را با عبارت فوق سبب نمی‌شود:

$$y_t = \sum_{j=0}^n \{ \alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t) \}$$

که در عبارت فوق،  $\omega_j = \frac{2\pi j}{T}$ ، ضربی از فرکانس بنیادی<sup>۱</sup> (اصلی)  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  است. وقتی  $T$  زوج باشد،  $n = \frac{T}{2}$  و  $\sin(\omega_n t) = 0$ ،  $\cos(\omega_0 t) = 1$ ،  $\sin(\omega_0 t) = 0$  و  $\cos(\omega_n t) = (-1)^n$  خواهد بود. بنابراین

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \{ \alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t) \} + a_n (-1)^n$$

و هنگامی که  $T$  فرد باشد،

$$n = (T-1)/2$$

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \{ \alpha_j \cos(\omega_j t) + \beta_j \sin(\omega_j t) \}$$

به‌منظور به‌دست آوردن نمایش طیفی<sup>۲</sup> یک فرایند ایستا مانند فرایند فوق، می‌توان فرض کرد که تعداد جملات عبارت فوق افزایش یافته و  $n$  به بی‌نهایت تمایل پیدا می‌کند. با توجه به این که با گرایش  $n$  به بی‌نهایت، ضرایب فوریه  $(\alpha_j, \beta_j)$  به صفر میل می‌کنند، نیاز به بیان عبارت فوق به‌صورت مشتقات توابع معینی است.

با فرض  $\alpha_j = dA(\omega_j)$  و  $\beta_j = dB(\omega_j)$  که  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  توابع پله‌ای با نقاط گسستگی  $\{\omega_j; j = 0, \dots, n\}$  اند می‌توان نوشت:

1-Fundamental.

2-Spectral.

$$y_t = \sum_j \{ \cos(\omega_j t) dA(\omega_j) + \sin(\omega_j t) dB(\omega_j) \}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_t = \int_0^\pi \{ \cos(\omega_j t) dA(\omega_j) + \sin(\omega_j t) dB(\omega_j) \} = y(t)$$

با توجه به این که در سری‌های زمانی،  $y(t)$  یک فرایند تصادفی فرض می‌شود، بنابراین،  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  نیز فرایندهای تصادفی تعریف شده روی  $[0, \pi]$  اند. فرض‌هایی که در درباره  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  در نظر گرفته می‌شوند به صورت ذیل‌اند:

$$A_1) \quad E \{ dA(\omega) \} = E \{ dB(\omega) \} = 0$$

$$A_2) \quad E \{ dA(\omega) dB(\lambda) \} = 0; \lambda, \omega \text{ هر برای}$$

$$E \{ dA(\omega) dA(\lambda) \} = 0; \quad \omega \neq \lambda \text{ اگر}$$

$$E \{ dB(\omega) dB(\lambda) \} = 0; \quad \omega \neq \lambda \text{ اگر}$$

$$A_3) \quad V \{ dA(\omega) \} = V \{ dB(\omega) \} = 2dF(\omega) = 2f(\omega)d\omega$$

در عبارات فوق، فرض اول، صفر بودن امید ریاضی فرایندهای  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  را بیان می‌کند. فرض دوم، استقلال دوبه‌دوی فرایندها و استقلال سریالی در هر فرایند را نشان می‌دهد و فرض سوم، واریانس تغییرات فرایند را به یک تابع مشتق پذیر  $F(\omega)$  (برخلاف  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  که بدلیل گسستگی در  $\omega_j$  مشتق پذیر نبودند)، مرتبط می‌کند. با استفاده از فرض‌های فوق و تبدیلات ذیل

$$dZ(\omega) = \frac{1}{2} \{ dA(\omega) - idB(\omega) \}$$

$$dZ^*(\omega) = \frac{1}{2} \{ dA(\omega) + idB(\omega) \}$$

با گسترش دامنه تعریف توابع  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  از  $[0, \pi]$  به  $[-\pi, \pi]$  و فرض این که  $A(\omega)$  و  $B(\omega)$  فرداند، می‌توان نوشت:

$$dZ^*(\omega) = dZ(-\omega)$$

$$E \{ dZ(\omega) dZ^*(1) \} = 0; \quad \omega \neq \lambda \text{ اگر}$$

$$E \{ dZ(\omega) dZ^*(\omega) \} = f(\omega)d\omega$$

با جای‌گذاری در عبارت معادل  $y(t)$  و ساده کردن آن

$$y(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} dz(\omega)$$

به دست می‌آید که نمایش طیفی فرایند  $y(t)$  است.

اگر چه نمایش طیفی سری‌های زمانی و تبدیل فوریه می‌توانند موجب سهولت تحلیل و تخمین مدل‌های سری زمانی شوند، اما تحلیل فرکانس در برخی از موارد جوابگو نیست.

مهم‌ترین تفاوت‌های تبدیل فوریه و تبدیل موجک به شرح ذیل‌اند:

- ۱- تبدیل فوریه به تحلیل فرکانس می‌پردازد، در حالی که تبدیل موجک، تحلیل مقیاس را هم مدنظر قرار می‌دهد.
- ۲- توابع پایه‌ای، تبدیلات فوریه سینوس و کسینوس‌اند، در حالی که در تبدیل موجک، توابع پایه، یکتا و منحصر به فرد نیستند. (در تبدیل موجک، توابع بی‌شماری وجود دارند.)
- ۳- در تحلیل موجک، دامنه دید قابل تغییر بوده و می‌توان هم‌زمان، توابع پایه‌ای کوتاه و بلند را داشت، در حالی که در تبدیل فوریه، محتوی فرکانس تابع در طول محور زمانی، مانا فرض می‌شود.
- ۴- اگر  $f(x)$  یک تابع مفروض باشد، انرژی تابع به صورت

$$E = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

تعریف می‌شود، که انرژی در تبدیل فوریه، یک تابع یا یک فرایند نامحدود است، در حالی که تبدیل موجک آن را محدود می‌کند. بنابراین، یک اغتشاش کوچک انفرادی در تبدیل فوریه فرکانس‌های سری فوریه را تحت تأثیر قرار می‌دهد، در حالی که در موجک این‌گونه نیست. در اقتصاد، تغییر رژیم‌های سیاستی، با موجک‌ها سازگاری دارد.

پیش از آن که به بررسی ارتباط تبدیل فوریه، نمایش طیفی و موجک‌ها به صورت جبری بپردازیم، مبانی موجک را مورد بحث قرار می‌دهیم.

همان‌طور که اشاره شد، موجک‌ها به دنبال تحلیل توابع در مقیاس‌های معین‌اند. و همچنین جنسیت جداگانه دارند. موجک‌ها موجک پدر معمولاً با  $\phi$  و موجک مادر با نماد  $\psi$  نمایش داده می‌شود که به صورت

$$\phi_{j,k}(t) = S^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - S^j k}{S^j}\right)$$

$$\psi_{j,k}(t) = S^{-\frac{j}{2}} \psi\left(\frac{t - S^j k}{S^j}\right)$$

در روابط فوق برای سادگی  $S=2$  فرض شده و با ساده‌سازی بیشتری می‌توان نوشت:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$$

البته شکل پیشین دو موجک مفهوم روشن‌تری دارد، زیرا یک کمیت؛

$$\frac{t - \mu}{S} \quad (1)$$

با پارامترهای مرکزیت  $\mu$  و مقیاس  $S$  یک تبدیل با موجک پدر؛

$$\psi\left(\frac{t - \mu}{S}\right)$$

مقیاس‌دهی مجدد برای؛

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{S}} \psi\left(\frac{t - \mu}{S}\right) \quad (2)$$

برابرسازی نرم  $\psi(t)$  با عدد یک.

تعمیم؛

$$\psi_{j,\mu}(t) = \frac{1}{S^{\frac{j}{2}}} \psi\left(\frac{t - \mu}{S}\right) \quad (3)$$

با فرض  $\mu = S^j k$ ، می‌توان به روابط پیش رسید.

$$\psi_{j,\mu}(t) = S^{-\frac{j}{2}} \psi(S^{-j}t - S^j k) = S^{-\frac{j}{2}} \psi(S^{-j}t - k)$$



همان‌طور که ملاحظه می‌شود، پارامتر مقیاس  $S$ ، نقش تحلیل موجک را از تحلیل فوریه متمایز می‌کند. البته ممکن است تصور شود که قرار دادن  $S=2$  نقش پارامتر مقیاس را از بین ببرد، در حالی که اگر توجه شود،  $2^{-\frac{j}{2}}$ ، با تغییر  $j$ ، می‌تواند مقیاس دلخواه را ایجاد کند.

خاصیت مقیاس<sup>۱</sup> یا اتساع<sup>۲</sup>، در تحلیل سری‌های زمانی فوق‌العاده مهم است. در عبارت  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{S}} \psi\left(\frac{t-\mu}{S}\right)$ ، تابع در  $M$  متمرکز شده و  $S$  نشان‌دهنده مقیاس است. انرژی تابع  $\psi(t)$  در همسایگی  $M$  متمرکز شده و اندازه آن با  $S$  متناسب است.

در معادله

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k)$$

در معادله

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}t - k)$$

مختلف  $k, j$  دوره‌های مختلف زمانی و فراوانی‌های متفاوت را پوشش می‌دهند. در فراوانی‌های با مقادیر بالا (مقادیر بزرگ  $j$ )، موجک امکان تمرکز روی جهش‌ها<sup>۳</sup>، برجستگی‌ها<sup>۴</sup> و نقاط تکین<sup>۵</sup> را فراهم می‌کند و در فراوانی‌های پایین (مقادیر کوچک  $j$ )، تمرکز بر همواری‌های سری و تناوب آن امکان‌پذیر می‌شود. (Jensen, 2000 p. 364)

1- Scaling.

2-Dilation.

3- Jumps.

4- cusps.

5- Singularity points.

تغییر ز دامنه دید را تغییر داده و می‌تواند تحلیل را از کلی به موضعی و برعکس تغییر دهد. موجک پدر انتگرالی برابر با یک و موجک مادر انتگرال صفر دارد.

$$\int \phi(t) dt = 1$$

$$\int \psi(t) dt = 0$$

موجک پدر، بخش هموار، روند (فرکانس پایین) سیگنال، و موجک مادر بخش‌های جزئی (فرکانس بالا) را نشان می‌دهد.

توابع  $\psi$  و  $\phi$  می‌توانند اشکال مختلف از جمله هتر<sup>۱</sup>، کلاه مکزیکی<sup>۲</sup>، سیملت<sup>۳</sup>، کویفلت<sup>۴</sup>، داوبیشی<sup>۵</sup>، مورلت<sup>۶</sup>، و ... داشته باشد. معادلات این توابع کمی پیچیده است و معمولاً از چند نوع معروف آن استفاده می‌شود.

معادلات  $\psi_{j,\mu} = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-\frac{j}{2}} t - k)$  و  $\phi_{j,\mu} = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-\frac{j}{2}} t - k)$ ، از نوع سیملت‌اند. ویژگی اصلی تحلیل موجک، توان آن در تجزیه یک متغیر یا سری زمانی اجزاء با وضوح مختلف یا اصطلاحاً چند نمایشی<sup>۷</sup> و یا به عبارت بهتر، تجزیه چند نمایشی<sup>۸</sup> است.

تبدیل موجک یک تابع مانند  $f$  می‌تواند به وسیله معادله زیر نشان داده شود:

$$W_{\psi} f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

که در حالت کلی، با

- 
- 1- Haar wavelet.
  - 2- Mexican hat.
  - 3- Symmlet.
  - 4- Coiflet.
  - 5- Daubechi.
  - 6- Morlet.
  - 7- Multi resolution.
  - 8- Multi resolution Decomposition.

$$W_{\psi} f(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left( 2^{-\frac{j}{2}} t - k \right) dt$$

حال می‌توان یک رابطه بین سری‌های زمانی و نمایش موجک آن برقرار کرد.

هر سری مانند  $y(t)$ ، به صورت زیر قابل نمایش است:

$$y(t) = \sum_k S_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t) + \dots + \sum_k d_{1,k} \psi_{1,k}(t)$$

که در عبارت فوق،  $j=1, 2, \dots, J$  و  $J$  حداکثر مقیاس مورد نظر است. همچنین،

$$S_{j,k} \approx \int y(t) \phi_{j,k}(t) dt$$

$$d_{j,k} \approx \int y(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

توابع پایه<sup>۱</sup>،  $\phi_{j,k}(t)$  و  $\psi_{j,k}(t)$  عمود بر هم فرض می‌شوند

$$\int \phi_{j,k}(t) \phi_{j,k'}(t) = \delta_{kk'}$$

$$\int \psi_{j,k}(t) \phi_{j,k'}(t) = 0$$

$$\int \psi_{j,k}(t) \psi_{j',k'}(t) = \delta_{kk'} \delta_{jj'}$$

که در عبارت فوق،  $\delta_{i,j} = 1$  (اگر  $i=j$ ) و  $\delta_{i,j} = 0$  (اگر  $i \neq j$ ).

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تبدیل موجک شبیه تبدیل فوریه است و علت شروع بحث با تبدیل فوریه، همین شباهت آن‌ها بوده است اما تفاوت اساسی در این است که در تبدیل موجک  $J$  به‌عنوان عامل مقیاس در تبدیل ظاهر شده و دامنه دید را تغییر می‌دهد. در حقیقت در تبدیل موجک نیز به مانند تبدیل فوریه، یک تابع یا سری زمانی به صورت مجموعه‌ای از جملات با توابع پایه موجک، بیان می‌شود، با این تفاوت که توابع موجک به‌مانند سینوس و کسینوس نبوده و دربرگیرنده پارامتر مقیاس‌اند.

### ۳- نوفه‌زدایی داده‌های تصادفی

به‌منظور مقایسه توان نوفه‌زدایی (نویززدایی) فیلتر موجک و توان نوفه‌زدایی فیلتر هودریک-پرسکات (HP)، از داده‌های تصادفی تولید شده ذیل، با معادلات

1- basis functions.

مشخص استفاده می‌کنیم این فیلتر در متون اقتصادی به‌صورت گسترده مورد بحث قرار گرفته و مطالب وسیعی دربارهٔ قوت و ضعف آن در ادبیات وجود دارند. گرلاچ و یو<sup>۱</sup>، این روش را در کنار فیلتر باکستر- کینگ<sup>۲</sup>، که به عنوان فیلتر BP3 نیز شناخته می‌شود، مورد استفاده قرار می‌دهند. در این جا، از آرایهٔ مباحث مربوط به این دو فیلتر خودداری می‌کنیم. هم‌چنین روش‌های دیگری از جمله روش BN<sup>۳</sup> و در ادبیات سیکل‌های تجاری، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. UC<sup>۴</sup>، یکی از روش‌های نوفه‌زدایی و دیگری نوفه‌زدایی با استفاده از موجک‌هاست. در نرم افزار MATLAB، برای نشان دادن توان و کارایی روش موجک، از مثال‌هایی استفاده شده‌است که در این جا می‌خواهیم نشان دهیم فیلتر HP هم می‌تواند برخی از فرایندهای تصادفی مورد بحث را، با دقتی برابر و یا حتی بیشتر از فیلتر موجک نوفه‌زدایی کند.

بر اساس مثال ارائه شده در MATLAB، داده‌های نوفه‌ای زیر را تولید می‌کنیم:  
با دستورهایی

```
t= [1:1000];
xref=sin(0.03*t);
```

ابتدا یک سری سینوسی غیر تصادفی تولید کرده، سپس یک جزء نوفه سفید به آن اضافه می‌کنیم

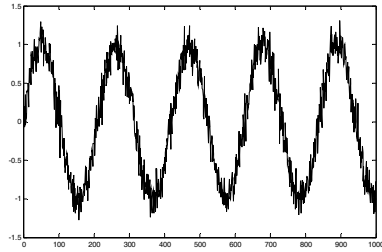
```
x=xref+0.15*randn (1, 1000);
```

در نمودارهای ذیل، سری غیر تصادفی و سری نوفه‌دار ترسیم شده‌اند:

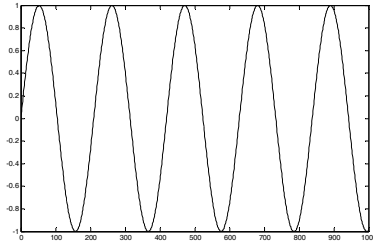
در نمودارهای ذیل، سری غیر تصادفی و سری نوفه‌دار ترسیم شده‌اند:

---

1- Gerlach and Yiu 2004.  
2- Baxter –King .  
3- Band Pass Filter .  
4- Beveridge-Nelson.  
5- Unobservable-Components.



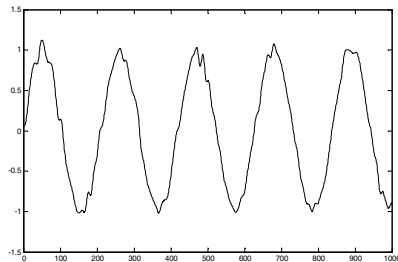
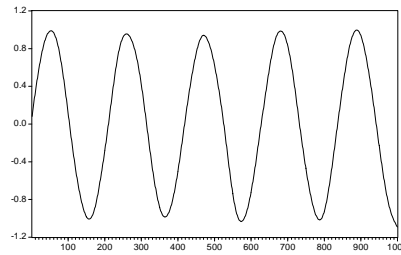
نمودار ۲- داده‌های نوفه‌دار



نمودار ۱- داده‌های اصلی

با استفاده از فیلتر HP و فیلتر موجک، نمودارهای ذیل قابل ترسیم‌اند:

```
xd = wden(x,'heursure','s','one',3,'sym8');
```

نمودار ۴- نوفه‌زدایی  
با استفاده از موجکنمودار ۳- نوفه‌زدایی  
با استفاده از HP

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، HP توان بالاتری در نوفه‌زدایی در این مثال

دارد. در یک مثال دیگر، داده‌های تصادفی زیر را تولید می‌کنیم:

```
sqrt_snr = 4; init = 205561586;  
[xref,x]= wnoise(1,11,sqrt_snr,init);
```

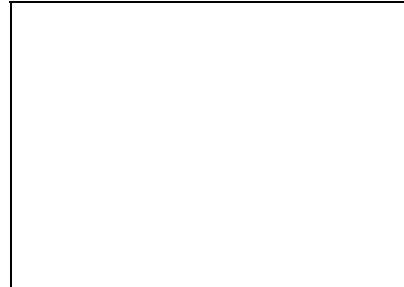
با استفاده از دستور زیر، داده‌های تولید شده را نوفه‌زدایی می‌کنیم:

```
xd = wden(x,'heursure','s','one',3,'sym8');
```

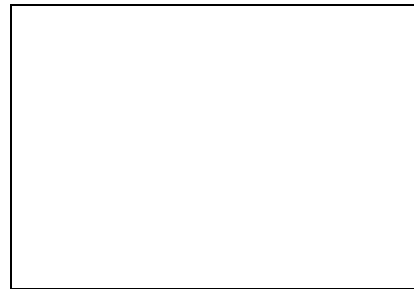
حال نمودارهای ذیل را بررسی می‌کنیم:



نمودار ۶- سیگنال نوفه‌دار



نمودار ۵- سیگنال اصلی

نمودار ۸- نوفه‌زدایی  
با فیلتر موجکنمودار ۷- نوفه‌زدایی  
با فیلتر HPنمودار ۱۰- نوفه‌زدایی  
با فیلتر Christiano Fitzgeraldنمودار ۹- نوفه‌زدایی  
با فیلتر Baxter - King

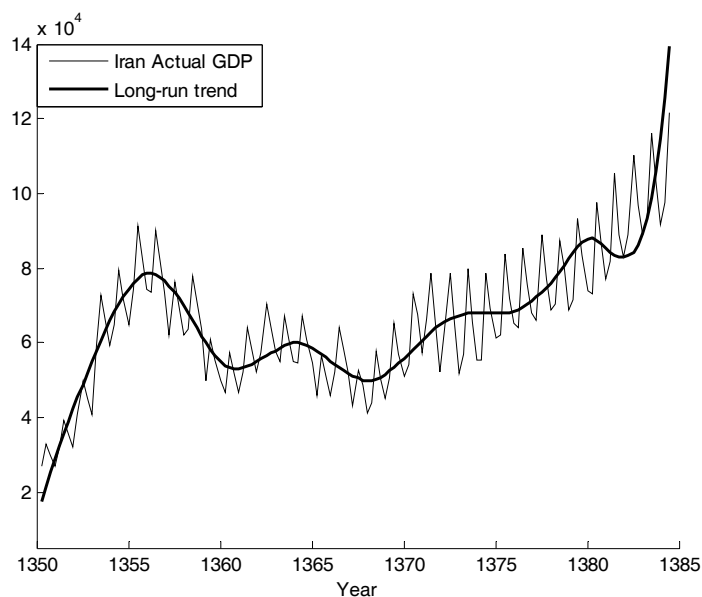
همان‌طور که دیده می‌شود، فیلتر موجک نوفه‌زدایی را با دقت بالاتری انجام می‌دهد. البته برای ارزیابی معیار عددی دقیق، RMSE را برای هر دو فیلتر محاسبه کرده‌ایم (۰/۵۶۳۷۶۱ برای موجک و ۰/۱۷۷۴۲ برای فیلتر HP)، که نتایج

عددی، مؤید نمودارهای فوق‌اند. علت این برتری موجک، توان بالای این تبدیل در تجزیه موضعی<sup>۱</sup> است.

#### ۴- تجزیه تولید ناخالص داخلی فصلی

به منظور بررسی سیکل‌های تجاری، با استفاده از نظریه موجک‌ها، داده‌های فصلی سال‌های ۱۳۸۴:۲-۱۳۶۷:۱، به قیمت‌های سال ۱۳۷۶، از سایت اینترنتی بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران استخراج شده و به کمک وزن‌های بدست آمده، از این اطلاعات برای فصول مختلف، داده‌های سال‌های ۱۳۶۷-۱۳۵۰ را نیز فصلی نموده‌ایم. داده‌های استفاده شده در مقاله، داده‌های بانک مرکزی پیش از تعدیل فصلی است.

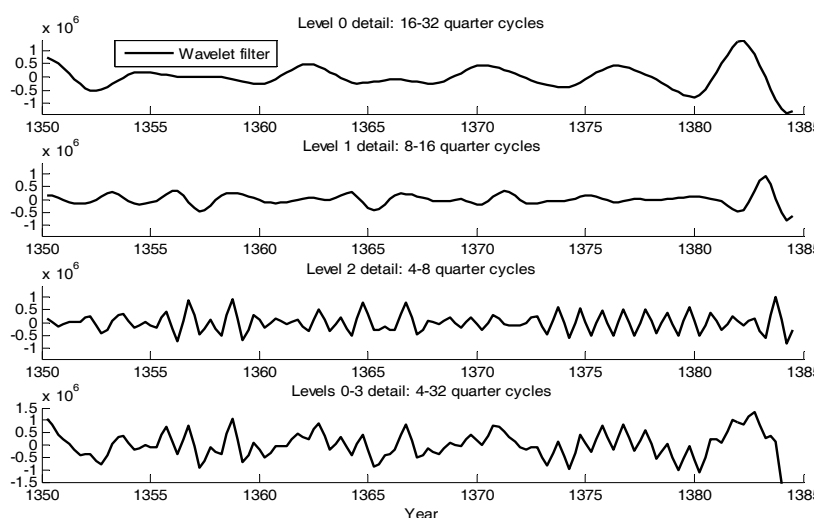
روند بلند مدت تولید ناخالص داخلی فصلی ایران با استفاده از تبدیل موجک، در نمودار ذیل نشان داده شده است.



نمودار ۱۱- روند تولید ناخالص داخلی ایران

1-Local.

نمودار ذیل، تجزیه موجک تولید ناخالص داخلی را نشان می‌دهد.<sup>۱</sup> تجزیه سطح صفر، سیکل‌های ۱۶ تا ۳۲ فصل (۴ تا ۸ سال) را نشان می‌دهد. تعداد سیکل‌های ۱۶-۳۲، ۸ سیکل است. البته سیکل‌های اول نمودار، به دلیل در دسترس نبودن داده‌های سال‌های قبل از ۱۳۵۰، به صورت فصلی کامل ترسیم نشده‌اند. تجزیه سطح یک سیکل‌های کوتاه‌تر، ۸-۱۶ فصل است، که تعداد ۱۴ سیکل است که باز هم سیکل‌های اول دوره مورد بررسی کامل نیست. تجزیه سطح ۲، سیکل‌های یک ساله تا دو ساله را نشان داده و تجزیه سطح ۳-۰، همه سیکل‌های کوتاه و بلندمدت را نشان می‌دهد. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، تبدیل موجک توان بررسی سری‌های زمانی با مقیاس‌های مختلف را دارد. به عبارت دیگر، می‌توان سیکل‌های بزرگ و سیکل‌های کوچک را به‌طور هم‌زمان، با این نوع تجزیه به دست آورد.



نمودار ۱۲- سیکل‌های تجاری ایران

۱- در تجزیه موجک، در این بخش مقاله، از کد MATLAB، که به وسیله M. Yogo نوشته شده، با اندکی تغییر استفاده شده است.



به بیان دیگر، تولید ناخالص داخلی ایران، با استفاده از زمان-مقیاس‌های مختلف نشان داده شده است. زمان-مقیاس‌های مورد استفاده، به صورت ۸-۴ ساله، ۲-۴ ساله، ۱-۲ ساله و سیکل‌های ۱ تا ۸ ساله بوده‌اند. همان‌طور که در نمودار فوق نشان داده شده است، تبدیل موجک، توان نمایش سری‌های زمانی با مقیاس‌های مختلف را دارد. به بیان روشن‌تر، در زمان-مقیاس ۸-۱ ساله، سیکل‌های کوچک و بزرگ به‌طور هم‌زمان نمایش داده می‌شوند و این انتخاب می‌تواند دلخواه باشد. در حالی که برخی تبدیل‌های دیگر مانند HP، در هر تبدیل، فقط می‌توانند یکی از مقیاس‌های کوتاه یا بلند را نمایش دهند. (البته فیلترهای BP و CF از دو مقیاس برای تجزیه سری استفاده می‌کنند.) هم‌چنین این روش‌ها به فرض مانایی حساس‌اند<sup>۱</sup>. البته در میان فیلترهای HP، BP و CF، توان CF بالاتر است، زیرا فیلتر HP فراوانی‌های ۸ سال و بالاتر داده‌های اقتصادی را جدا می‌کند و در بهترین حالت، یک فیلتر فراوانی بالا<sup>۲</sup> محسوب می‌شود، در حالی که فیلترهای BP و CF، فیلترهای فراوانی بالا و فراوانی پایین<sup>۳</sup> آند. (باند فراوانی) علت برتری CF نسبت به BP، در استفاده فیلتر CF از همه داده‌ها است.<sup>۴</sup>

در تحلیل موجک‌ها، علاوه بر پیدا کردن سیکل‌ها می‌توان انرژی سری را نیز بین روند و نوسان توزیع کرد. همان‌گونه که در بخش ۲ توضیح داده شد، یکی از ویژگی‌های مطلوب تبدیل موجک‌ها حفظ انرژی سری‌های زمانی است. برای تولید ناخالص داخلی ایران انرژی به صورت  $E_a = 99.997$  و  $E_d = [0.00118 \ 0.00045 \ 0.00022 \ 0.00101]$  به ترتیب بین روند a و نوسان d توزیع می‌شود. جدول ذیل، واریانس ضرایب موجک را برای تولید ناخالص داخلی ایران نشان می‌دهد. به‌منظور بررسی نوسانات در زیر دوره‌های

1- Baxter and King 1999, p.576.

2- High - Pass Filter.

3- Band - Pass Filter.

4- Shelley and Wallace 2005, pp.1-2.

مختلف، ضرایب موجک برای سال‌های پیش از انقلاب، دوران جنگ تحمیلی و دوران پس از جنگ، از تبدیل موجک با ویژگی‌های یکسان با موجک استفاده شده برای کل دوره ۱۳۸۴-۱۳۵۰، استفاده می‌کنیم. جدول ذیل، نتایج مربوط به واریانس ضرایب را ارائه می‌دهد.

جدول ۱- انرژی و واریانس ضرایب موجک

متغیر	دوره	ضریب ۱	ضریب ۲	ضریب ۳	ضریب ۴	انرژی روند
واریانس	کل دوره	9078.811	4872.638	1466.703	1007.513	-
	پیش از جنگ	5756.258	536.9443	64.16215	5.871039	-
	دوران جنگ	3908.06	991.9348	81.93276	4.338674	-
	پس از جنگ	9857.781	4872.638	505.2924	31.01615	-
انرژی	کل دوره	0.001187	0.000448	0.000219	0.001012	99.99713
	پیش از جنگ	0.00163	0.000882	0.000715	0.001669	99.99510
	دوران جنگ	0.00046	0.000364	0.000233	0.004038	99.99491
	پس از جنگ	0.000573	0.000166	0.000133	0.003084	99.99604

همان‌طور که در جدول فوق نشان داده شده است، انرژی، تا اندازه زیادی در روند سری تولید ناخالص داخلی حفظ شده است. البته حفظ کامل آن در یک محدوده معین بر اساس اصل عدم قطعیت‌ها یزنبرگ<sup>۱</sup> ممکن نیست. به همین دلیل، تغییر بسیار ناچیزی در انرژی مربوط به بخش روند سری دیده می‌شود. هم‌چنین، تفاوت چندانی در دوره‌های پیش از جنگ تحمیلی و دوران جنگ وجود ندارد. البته افزایشی در دوران پس از جنگ در نوسانات سیکل‌ها قابل مشاهده است.

۱- بر اساس اصل عدم قطعیت‌ها یزنبرگ Heisenberg Uncertainty Principle محدود کردن میزان ثابت انرژی در یک بازه زمانی کوچک دلخواه ممکن نیست. (walker, p. 16).

### ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بر اساس فیلتر موجک، سیکل‌های مختلف تولید ناخالص داخلی ایران در بازه‌های ۱۶ تا ۳۲، ۸ تا ۱۶، ۴ تا ۸، نشان می‌دهند که تولید ناخالص داخلی این کشور، نوسانات کوتاه مدت و بلند متعددی داشته است، که تحلیل موجک با تغییر مقیاس، به خوبی آن را نشان می‌دهد. نوسانات ضرایب موجک در دوران پس از جنگ، تا اندازه‌ای افزایش داشته است، اما تغییر چندانی در توزیع انرژی در دوره‌های پیش و پس از جنگ مشاهده نمی‌شود.

با توجه به این که تحلیل موجک نیازی به فرض مانایی ندارد و امکان تحلیل سری‌های زمانی را در مقیاس‌های مختلف نشان می‌دهد، پیشنهاد می‌شود در شرایطی که سری مورد نظر نامانا بوده یا تغییرات ناگهانی در آن وجود دارد، از تحلیل موجک برای تعیین سیکل‌ها و سایر اجزای سری استفاده شود.

### فهرست منابع:

- 1- Antoniou A., Vorlow C. E (2005). Price Clustering and Discreteness: Is There Chaos Behind the Noise? *Physica A* 348 389-403
- 2- Baxter, M., King, R.G (1999). Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series. *Rev. Econ. Statistics*. 81,575-593.
- 3- Connor J., R. Rossiter. Wavelet Transforms and Commodity Prices. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. Volume 9, Issue 1(2005).
- 4- Chatfield, C(1984). *The Analysis of Time Series: An Introduction*. Fourth Edition. Chapman & Hall.
- 5- Fan Y. and Whitcher, B(2003). A wavelet Solution to the Spurious Regression of Fractionally Differenced Processes. *Appl. Stochastic Models Bus. Ind.*, 19:171-183 (DOI: 10.1002/asmb.497).
- 6- Gerlach, S. and M. S. Yiu (1999). Estimating Output Gaps in Asia: A Cross Country Study. *Journal of Japanese International Economies* 18 (2004) 115-136
- 7- Jensen, M. J. Using Wavelets to Obtain a Consistent Ordinary Least Squares

- 8- Estimator of the Long-memory Parameter. J. Forecast. 18, 17-32.
- 9- Jensen, M. J(2000). An Alternative Maximum Likelihood Estimator of Long - Memory Processes Using Compactly Supported Wavelets. Journal of Economic Dynamics & Control 24, 361-387.
- 10- Jagric T. and Ovin R(2004).Method of Analyzing Business Cycles in a Transition Economy: The Case of Slovenia. The Developing economies, XLII-1, 42-46.
- 11- Kim C., Yu K., Song Y.H. (2002) Prediction of System Marginal Price of Electricity Using Wavelet Transforms Analysis. Energy Conversion and Management 43 1839–1851.
- 12- Kim ,S. and In H.F. ,( 2003)The Relationship Between Financial Variables and Real Economic Activity: Evidence From Spectral and Wavelet Analyses . Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics Volume 7, Issue 4.
- 13- Kirmana, A. and Teysie` G. (2005) Testing for Bubbles and Change-Points. Journal of Economic Dynamics & Control 29 765–799.
- 14- Mulligan, R.F. and Lombardo G.Maritime Businesses(2004). Volatile Stock Prices and Market Valuation Inefficiencies. The Quarterly Review of Economics and Finance 44 321–336.
- 15- Ramsey J. B. (2002) Wavelets in Economics and Finance: Past and Future Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics Volume 6, Issue 3.
- 16- Shelley, G. and F. Wallace, (2005) "The relation between U.S. money growth and inflation: evidence from a band–pass filter." *Economics Bulletin*, Vol. 5, No. 8 pp. 1–13.
- 17- Strang, Gilbert (1993) .Wavelet Transforms Versus Fourier Transforms .Bulletin of The American Mathematical Society Volume 28, Number 2, April, Pages 288-305.
- 18- Walker J. S. A Primer on Wavelets and Their Scientific. Applications.Chapman & Hall.
- 19- Yogo M.(2003)Measuring Business Cycles: Wavelet Analysis of Economic Time Series. August 23.Working Paper.