

# محاسبه‌ی بازدهی بدون ریسک بازارهای مالی ایران به روش فیلتر کالمن

حسین عباسی نژاد\*

استاد دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه تهران habasi@ut.ac.ir

شاپور محمدی

استادیار دانشکده‌ی مدیریت دانشگاه تهران shmohamadi@gmail.com

وحید بهروزی ایزدموسی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده‌ی اقتصاد دانشگاه تهران

vahid.behrouz@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۸۸۷/۲۶ تاریخ پذیرش: ۸۹/۱۰/۲۸

## چکیده

نرخ بازدهی بدون ریسک نقش مهمی را در تئوری‌های اقتصاد مالی و هم‌چنین بازارهای مالی ایفا می‌کند. به دلیل حرمت ربا در کشورهای اسلامی، ابزاری با بازدهی بدون ریسک به عنوان معیاری برای سنجش نرخ بازدهی بدون ریسک در دست نمی‌باشد. در پژوهش حاضر برای تخمین این متغیر در بازارهای مالی ایران از روش فیلتر کالمن استفاده می‌شود. این روش بر اساس یک فضای حالت پایه‌گذاری می‌شود که از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای و یکی از معادلات خودرگرسیون و یا گام تصادفی استخراج شده است و پارامترهای مدل با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده می‌شوند. در ادامه مشاهده می‌شود که معادله‌ی حالت خودرگرسیونی مرتبه‌ی اول، رفتار بازدهی بدون ریسک را بهتر از سایر مدل‌ها تبیین می‌کند و میانگین و واریانس مقادیر تخمین زده شده به ترتیب برابر  $0/0397$  و  $0/0005$  بوده و آخرین مقدار حاصله،  $0/036$  می‌باشد.

طبقه‌بندی JEL: G12, C32

کلید واژه: مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای، بازدهی بدون ریسک، فضای حالت، فیلتر کالمن

## ۱- مقدمه

وجود بازارهای مالی کارآمد در کشورهای صاحب اقتصاد پیشرفته منجر به شکل‌گیری ابزارهای متنوع شده است. این ابزارها که عموماً در حیطه‌ی بازار پول و یا بازار سرمایه می‌گنجد، در ماهیت با یکدیگر تفاوت داشته و طیف وسیعی از نرخ‌های بازده را ایجاد می‌کنند. به عنوان مثال خرید برخی از این دارایی‌ها مستلزم تقبل ریسک بوده و خرید برخی دیگر فاقد ریسک است، که افراد بر حسب این که تا چه میزان تمایل به تقبل ریسک دارند، به سمت این ابزارها گرایش پیدا می‌کنند. از سوی دیگر این ابزارها در بازارهای ثانویه دائماً در حال مبادله هستند که این امر نرخ ابزارهای مالی را تحت تأثیر قرار داده و به عبارت دیگر رفتار اقتصادی داده‌های مربوط به آن‌ها را شکل می‌دهد. در حقیقت قیمت و نرخ بازده این دارایی‌ها در بازار تعیین می‌شود و ممکن است عوامل بسیاری چون شرایط کلان اقتصادی، موقعیت‌های بازارهای بین‌المللی و حتی عوامل سیاسی و روابط بین‌الملل بر روی نرخ این ابزارها تأثیرگذار باشند.

اقتصاد ایران بنابر دلایل مختلفی چون حرمت ربا، عدم توجه کافی به بازارهای مالی، دولتی بودن بسیاری از بنگاه‌ها و یا اولویت دادن به سرمایه‌گذاری در بخش‌های دیگر، فاقد بازارهای مالی کارآمد بوده و این امر مانع از شکل‌گیری ابزارهای مالی متنوع شده است. هم‌چنین نرخ بازده برخی از ابزارهای موجود در بازارهای مالی ایران به صورت برون‌زا و یا به عبارت صحیح‌تر به صورت دستوری تعیین می‌شود، که این امر به ناکارآمدی بازارهای مالی دامن می‌زند. این در حالی است که تقریباً در تمامی بازارهای برجسته‌ی دنیا، یکی از ابزارهای مالی بدون ریسک به عنوان بازدهی بدون ریسک<sup>۱</sup> در نظر گرفته می‌شود که از آن جمله می‌توان به اوراق خزانه در کشور آمریکا و یا گیلت<sup>۲</sup> در انگلستان اشاره کرد، اما فقدان چنین ابزاری در بازارهای مالی ایران، متغیر بازدهی بدون ریسک را به یک متغیر پنهانی<sup>۳</sup> یا مشاهده نشده<sup>۴</sup> (در این پژوهش منظور از متغیر پنهانی یا مشاهده نشده، آن دسته از متغیرهایی است که با روش‌های متداول اقتصادسنجی قابل تخمین نبوده، ولی رفتار اقتصادسنجی آن‌ها مشخص است.) تبدیل کرده است که محاسبه‌ی آن به روش فیلتر کالمن<sup>۵</sup> میسر می‌شود.

فیلتر کالمن، روشی است که در سال ۱۹۶۰ توسط فردی به نام کالمن معرفی شده است و امروزه در رشته‌های مختلف کاربرد بسیاری دارد و در شاخه‌ی اقتصادسنجی

---

1- Risk free return.

2- Gilt.

3- Hidden variable.

4- Unobserved variable .

5- Kalman filter.

سری‌های زمانی نیز برای محاسبه‌ی اجزای غیرقابل مشاهده<sup>۱</sup>ی مدل‌ها به کار می‌رود. این روش که به صورت بازگشتی<sup>۲</sup> عمل می‌کند، با دادن یک مقدار اولیه برای متغیر حالت و میانگین مربعات خطای<sup>۳</sup> متناظر با آن آغاز می‌شود و با استفاده از معادلات کالمن، در هر گام یکی از مقادیر حالت را محاسبه و از این مقدار در تخمین مقادیر بعدی استفاده می‌کند. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که متغیر حالت در تمامی دوره‌ها محاسبه شده و مقدار خطا به حداقل می‌رسد. در این پژوهش بازدهی بدون ریسک در فضای حالتی<sup>۴</sup> که متشکل از مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای<sup>۵</sup> و یکی از مدل‌های گام تصادفی و یا خود رگرسیون می‌باشد، تصریح شده و پارامترهای مجهول مدل به روش حداکثر درست‌نمایی و مقادیر متغیر حالت به روش فیلتر کالمن تخمین زده می‌شوند.

در سال‌های اخیر مقالات بسیاری در زمینه‌ی نرخ بهره، نرخ بهره‌ی طبیعی، تورم انتظاری، نرخ طبیعی بی‌کاری و ... منتشر و در آن‌ها از روش فیلتر کالمن استفاده شده است. از مهم‌ترین پژوهش‌های منتشر شده در زمینه‌ی نرخ بهره و نرخ بهره‌ی طبیعی می‌توان به محاسبه‌ی نرخ بهره‌ی طبیعی در کشور آمریکا (لوباخ<sup>۶</sup>، ویلیامز<sup>۷</sup>، ۲۰۰۳) و نیوزلند (باسدونت<sup>۸</sup>، بجورکستن<sup>۹</sup>، کاراگدیگلی<sup>۱۰</sup>، ۲۰۰۴)، اشاره کرد. هم‌چنین از دیگر مطالعاتی که در زمینه‌ی نرخ بهره‌ی طبیعی انجام گرفته است، مقاله‌ی مربوط به (مسونیر<sup>۱۱</sup>، رنی<sup>۱۲</sup>، ۲۰۰۷) می‌باشد. روش اقتصادسنجی سری‌های زمانی به کار رفته در این مقاله نیز هم‌چون دو مقاله‌ی قبلی، براساس روش فیلتر کالمن است که در آن به تخمین نرخ بهره‌ی طبیعی حقیقی<sup>۱۳</sup> یا نرخ بهره‌ی حقیقی تعادلی<sup>۱۴</sup> (نرخ بهره‌ی واقعی کوتاه‌مدت متناظر با سطح تولید بالقوه<sup>۱۵</sup> و سطح تورم باثبات<sup>۱۶</sup>) برای منطقه‌ی یورو<sup>۱۷</sup> پرداخته می‌شود. علاوه بر این مقاله، تحقیقات دیگری نیز در منطقه‌ی یورو انجام شده

---

1- Unobservable components.  
2- Recursive.  
3- Mean square error.  
4- State space.  
5- Capital Asset Pricing Model.  
6- Laubach.  
7- Williams.  
8- Basdevant.  
9- Björkstén.  
10- Karagedikli.  
11- Mesonnier.  
12- Renne.  
13- The natural real rate of interest.  
14- The real equilibrium rate of interest.  
15- Potential level of output .  
16- Stable rate of inflation .  
17- Euro area.

است که از آن جمله می‌توان به مقالاتی چون (تیمان<sup>۱</sup>، پیلگارد<sup>۲</sup>، استراکا<sup>۳</sup>، ۲۰۰۶) و (کورسم<sup>۴</sup>، ۲۰۰۴) اشاره کرد که در آن‌ها نیز نرخ بهره‌ی طبیعی و شکاف تولید مورد بحث قرار گرفته است. رابطه‌ی نرخ بهره در کشورهای گروه هفت نیز از دیگر مقالات مرتبطی است که در این جا می‌توان به آن اشاره کرد. وجه تشابه این مقاله با پژوهش مورد بررسی، در نرخ بهره و روش به کار رفته در آن می‌باشد. در این مطالعه که توسط (باراسی<sup>۵</sup>، کاپوراله<sup>۶</sup>، هال<sup>۷</sup>، ۲۰۰۵) به انجام رسیده است، تغییرات رابطه‌ی علی ساختاری<sup>۸</sup> نرخ‌های کوتاه‌مدت گروه هفت، به وسیله‌ی تخمین ضریب تعدیل<sup>۹</sup> در مدل تصحیح خطا<sup>۱۰</sup> به روش فیلتر کالمن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تورم انتظاری، یکی دیگر از متغیرهای مشاهده نشده می‌باشد که همواره در معرض دید محققان و پژوهشگران روش فیلتر کالمن قرار می‌گیرد. یکی از قوی‌ترین و در حقیقت معتبرترین مقالاتی که در این زمینه انجام گرفته است، مقاله‌ی (بورمیستر<sup>۱۱</sup>، وال<sup>۱۲</sup>، همیلتون<sup>۱۳</sup>، ۱۹۸۶) می‌باشد. در این مقاله از داده‌های مربوط به نرخ تورم تحقق یافته و نرخ بهره در جهت اندازه‌گیری نرخ تورم انتظاری ماهیانه استفاده می‌شود.

از دیگر موضوعات مهمی که با روش فیلتر کالمن مورد بررسی قرار گرفته است نرخ طبیعی بیکاری یا نایرو<sup>۱۴</sup> می‌باشد که مقالات بسیاری در کشورهای مختلف و با استفاده از داده‌های متفاوت به این مسئله اختصاص داده شده است و از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به مقالات (گرینسلید<sup>۱۵</sup>، پیرس<sup>۱۶</sup>، صالحین<sup>۱۷</sup>، ۲۰۰۳)، (استیگر<sup>۱۸</sup>، استاک<sup>۱۹</sup>، واتسون<sup>۲۰</sup>، ۱۹۹۷) و (لوباخ، ۲۰۰۱) اشاره کرد.

- 
- 1- Thimann.
  - 2- Pilegaard.
  - 3- Stracca.
  - 4- Cuarems.
  - 5- Barassi.
  - 6- Caporale.
  - 7- Hall.
  - 8- Causal structure linking.
  - 9- Adjustment coefficient .
  - 10- Error correction model.
  - 11- Burmeister.
  - 12- Wall.
  - 13- Hamilton.
  - 14- Non accelerating inflation rate of unemployment (NAIRU).
  - 15- Greenslade.
  - 16- Pierse.
  - 17- Saleheen.
  - 18- Staiger.
  - 19- Stock.
  - 20- Watson.

نرخ ارز، یکی دیگر از متغیرهای اقتصادی است که در تحقیقات عملی انجام گرفته، معمولاً با استفاده روش فیلتر کالمن مورد بررسی قرار گرفته است. به طور کلی در این تحقیقات از روش فیلتر کالمن برای بالا بردن سطح دقت مدل در انجام پیش‌بینی استفاده شده است. یکی از تحقیقات انجام شده در این زمینه، مقاله‌ی (حیدری، ۱۹۹۲) است که در آن نشان داده می‌شود که قدرت پیش‌بینی برون نمونه‌ای<sup>۱</sup> در مدل‌های ساختاری برای نرخ‌های دلار به پوند، دلار به مارک، دلار به ین و نرخ وزنی دلار برحسب میزان مبادله، نسبت به یک مدل ساده‌ی گام تصادفی ضعیف‌تر می‌باشد. از سویی نتایج تحقیق نشان می‌دهد که ضرایب مدل‌های سری‌های زمانی و هم‌چنین آن دسته از مدل‌های ساختاری که از داده‌های سری زمانی استفاده می‌کنند، در طول زمان تغییر می‌کند. بنابراین روشی که قادر باشد از این یافته در فرایند تخمین استفاده کند، قدرت پیش‌بینی درون نمونه‌ای<sup>۲</sup> و برون نمونه‌ای را افزایش می‌دهد. بر این اساس مشخص می‌شود که استفاده از روش فیلتر کالمن در تخمین مدل ساختاری پویا<sup>۳</sup> (ضرایب آن در طول زمان تغییر می‌کند) قدرت پیش‌بینی این مدل را افزایش می‌دهد. پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد (گودرزی، ۱۳۸۷)، نمونه‌ای دیگر از تحقیقات انجام شده در زمینه‌ی نرخ ارز باشد. در این پایان‌نامه ابتدا به پیشینه‌ی سیستم‌های نرخ ارز اشاره شده و سپس با معرفی فرایندهای خودرگرسیون میانگین متحرک<sup>۴</sup>، گارچ<sup>۵</sup> و برخی مفاهیم مرتبط با آن‌ها به معرفی روش فیلتر کالمن و کاربردهای مختلف آن پرداخته می‌شود. و اما مقاله (عباسی نژاد، کاوند، ۱۳۸۶) از دیگر پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی فیلتر کالمن می‌باشد که در آن به محاسبه‌ی بهره‌وری در ایران مبادرت ورزیده شده است. در این مقاله نرخ رشد تولید بالقوه و شکاف تولید به طور هم‌زمان و با استفاده از فضای حالت برآورد و نتایج به دست آمده برای تولید بالقوه و سیکل تولید، با روش‌های هدریک-پرسکات<sup>۶</sup> و باکستر-کینگ<sup>۷</sup>، مقایسه و تجزیه و تحلیل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که در سال‌های اخیر بهره‌وری روندی کند، اما مثبت داشته و از ثبات نسبی برخوردار بوده است. از دیگر پژوهش‌های مرتبط کار شده در ایران می‌توان به پایان

---

1- Out-of-sample.

2- In-sample.

3- Time varying.

4- Autoregressive moving average process (ARMA).

5- Generalized autoregressive conditional heteroskedastic (GARCH).

6- Hedrick & Perskat(HP).

7- Baxter & King.

نامه‌ی مقطع دکترای (متقی، ۱۳۷۷) اشاره کرد که در زمینه‌ی اقتصاد کلان و رابطه‌ی تورم و بیکاری می‌باشد.

در ادامه، در بخش دوم این مقاله مبانی نظری مربوط به فضای حالت و روش فیلتر کالمن شرح داده می‌شود. در بخش سوم، به طراحی مدل، تخمین و آزمون‌های آماری پرداخته و در بخش چهارم از مباحث مذکور نتیجه‌گیری می‌شود.

## ۲- مروری بر مبانی نظری و روش انجام تحقیق

### فضای حالت

فضای حالت روش بخصوصی برای تصریح مدل‌های تجربی در رشته‌های متفاوت می‌باشد. خاستگاه اولیه‌ی این نوع تصریح، در رشته‌های فنی مهندسی و به ویژه در شاخه‌ی مهندسی کنترل و مسائل مربوط به ناوبری است. استفاده از این نوع تصریح، در سال‌های اخیر به حوزه‌ی اقتصاد سنجی و سری‌های زمانی نیز تسری داده شده است و همان‌طور که در بخش قبلی اشاره گردید، پژوهش‌های بسیاری در این زمینه انجام گرفته است. به عبارت دیگر، هم‌اکنون فضای حالت به عنوان زیر مجموعه‌ای از ادبیات و روش‌های موجود در اقتصاد سنجی و سری‌های زمانی به شمار می‌آید و کتب بسیاری به صورت اختصاصی توسط اساتید این حوزه در زمینه‌ی فضای حالت منتشر شده است که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به (دوربین<sup>۱</sup>، کوپمن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۱) و (کومندر<sup>۳</sup>، کوپمن، کوپمن، ۲۰۰۱) اشاره کرد.

بسیاری از مدل‌های سری‌های زمانی مانند فرایندهای خودرگرسیون میانگین متحرک انباشته<sup>۴</sup> قابلیت این را دارند که در فرم فضای حالت تصریح و برازش شوند. در ادبیات اقتصادسنجی، برای مدل‌سازی متغیرهای پنهان مانند انتظارات عقلایی<sup>۵</sup>، خطاهای اندازه‌گیری<sup>۶</sup>، مشاهدات از دست رفته<sup>۷</sup>، درآمد دائمی، اجزای غیرقابل مشاهده مشاهده (در دوره‌ها و روندها) و نرخ طبیعی بی‌کاری، از فضای حالت استفاده می‌شود. به طور کلی در تصریح مدل‌ها در فضای حالت دو مزیت عمده وجود دارد. اولاً، در این روش قابلیت تخمین متغیرهای مشاهده نشده، در کنار سایر متغیرها و پارامترها وجود

1- Durbin.

2- Koopman.

3- Commandeur.

4- Autoregressive integrated moving average process (ARIMA).

5- Rational expectation.

6- Measurement errors.

7- Missing observations.

دارد. ثانیاً، در این حالت امکان تخمین متغیرهای مذکور به روش فیلتر کالمن که یک روش قوی به روز شونده می‌باشد، میسر می‌شود.

به صورت جبری فضای حالت از دو بخش معادلات مشاهده<sup>۱</sup> و معادلات حالت<sup>۲</sup> تشکیل شده است که به مجموع آن‌ها فضای حالت اطلاق می‌شود. اگر فرض کنیم  $\theta_t$  یک بردار  $(m \times 1)$  متشکل از متغیرهای مشاهده نشده، بردار حالت باشد و  $X_t$  یک بردار  $(r \times 1)$  متشکل از متغیرهای مشاهده شونده باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$X_t = h_t' \theta_t + n_t \quad n_t \sim N(0, \sigma_n^2) \quad (1)$$

به معادله‌ی فوق معادله‌ی مشاهده یا معادله‌ی سیگنال<sup>۳</sup> و یا معادله‌ی اندازه‌گیری گفته می‌شود، به طوری که در آن  $h_t'$  ماتریس پارامترها به ابعاد  $(r \times m)$  و  $n_t$  بردار خطای مشاهده<sup>۴</sup> به ابعاد  $(r \times 1)$  می‌باشند. در معادله‌ی فوق مقادیر متغیر  $X_t$  از قبل معلوم شده و مقادیر ماتریس  $h_t'$  نیز می‌تواند معلوم باشد که در صورت مجهول بودن، به روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده می‌شود. همان‌طور که از نام متغیر مشاهده نشده  $(\theta_t)$  مشخص است، این متغیر که در این مدل از بیش‌ترین اهمیت برخوردار است، به صورت مستقیم قابل اندازه‌گیری نمی‌باشد و بنابراین از متغیر  $X_t$  که متغیر  $\theta_t$  را هم در درون خود جای داده، برای پی بردن به ماهیت  $\theta_t$  استفاده می‌شود. در سیستم فضای حالت، علاوه بر معادله‌ی مشاهده، معادله‌ی دیگری نیز که گویای روند تغییرات  $\theta_t$  در طول زمان است، به کار می‌رود که به آن معادله‌ی حالت یا معادله‌ی انتقال<sup>۵</sup> گفته شده و به شکل زیر تصریح می‌شود:

$$\theta_{t+1} = G_t \theta_t + w_t \quad (2)$$

در معادله‌ی فوق ماتریس  $G_t$  با ابعاد  $(m \times m)$ ، معلوم فرض می‌شود و  $w_t$  نیز بردار خطاهاست. دو معادله‌ی مذکور در کنار یکدیگر فرم کلی فضای حالت را تشکیل می‌دهند که در آن فرض می‌شود  $n_t$  و  $w_t$  در زمان‌های مختلف با یکدیگر همبستگی نداشته و هر دوی آن‌ها فاقد همبستگی سریالی<sup>۶</sup> هستند. هم‌چنین،  $w_t$  دارای توزیع نرمال با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس-کواریانس<sup>۷</sup> معلوم  $W_t$  است. نسبت دو

1- Observation equation.  
 2- State equation.  
 3- Signal equation.  
 4- Observation error.  
 5- Transition equation.  
 6- Serially uncorrelated.  
 7- Variance-covariance.

واریانس به کار رفته در این دو معادله (یعنی  $\sigma_w^2/\sigma_n^2$ )، نسبت سیگنال به نویز<sup>۱</sup> نامیده می‌شود که در جهت بررسی ویژگی‌های مدل نقش مهمی را ایفا می‌کند. به طور خاص در صورتی که مقدار  $\sigma_w^2$  برابر صفر باشد، این نسبت برابر صفر می‌شود که نشان می‌دهد مدل مورد نظر فاقد ماهیت تصادفی بوده و متغیر، حالت غیرتصادفی می‌باشد. (چتفیلد<sup>۲</sup>، ۲۰۰۴)

### فیلتر کالمن

فیلتر کالمن، در مدل فضای حالت به کار گرفته می‌شود. این الگوریتم یک راه حل بازگشتی<sup>۳</sup> برای به روز شونده‌گی یا به هنگام‌سازی<sup>۴</sup> سیستم توصیف شده در فضای حالت می‌باشد. این فیلتر هم در داده‌های مانا و هم در داده‌های نامانا قابل استفاده است. این راه حل، از داده‌های موجود برای بهینه کردن داده‌های قبلی استفاده می‌کند. هم‌چنین فیلتر کالمن روشی است که در آن به جای این‌که از ذخیره‌ی تمام داده‌های قبلی برای به دست آوردن داده‌ی بعدی و تصحیح مدل استفاده شود، به صورت مستقیم از مدل‌های ریاضی برای تصحیح مدل استفاده می‌کند. این روش به صورت هم‌زمان معادلات حالت و معادلات اندازه‌گیری را برای به دست آوردن حالات مشاهده نشده به صورت بهینه حل می‌کند به عبارت دیگر، این روش به منظور استفاده از تمام متغیرهای مشاهده شده که شامل  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_T$  می‌شود، برای به دست آوردن حالت  $\theta_i$  به صورت حداقل خطا استفاده می‌کند. در صورتی که  $i=T$  باشد، به این عمل فیلترینگ<sup>۵</sup> و در صورتی که  $i>T$  باشد، به این عمل پیش‌بینی<sup>۶</sup> گفته می‌شود و بالاخره بالاخره در صورتی که  $i<T$  باشد، این عمل را هموارسازی<sup>۷</sup> می‌نامند (گودرز، ۱۳۸۷). در حقیقت ابتدا عمل فیلترینگ انجام می‌گیرد، به طوری که از اطلاعات مربوط به هر دوره برای محاسبه‌ی متغیر مشاهده نشده در همان دوره استفاده می‌شود و سپس عمل پیش‌بینی انجام می‌گیرد که در این جا با استفاده از داده‌های حاصل از مرحله‌ی فیلترینگ، مقادیر آینده‌ی متغیر حالت محاسبه می‌شود و در نهایت عمل هموارسازی انجام می‌گیرد، که در این مرحله‌ی متغیر حالت با استفاده از داده‌های محاسبه شده در کل فرایند فیلترینگ و پیش‌بینی، محاسبه می‌شود.

1- Signal to noise ratio.

2- Chatfield.

3- Recursive solution.

4- Updating.

5- Filtering.

6- Forecasting.

7- Smoothing.



در این بخش به شرح فرایند فیلتر کالمن برای تخمین متغیر حالت در زمان‌های مختلف پرداخته می‌شود. این عمل از طریق معادلاتی انجام می‌گیرد که امکان بهینه کردن تخمین متغیر حالت را در شرایطی که مشاهده‌ی جدیدی موجود است، فراهم می‌کنند. بدین منظور فضای حالت معرفی شده در بالا دوباره، مطرح و برای کامل‌تر شدن مبحث فرض می‌شود که در معادله‌ی مشاهده آن علاوه بر بردار متغیر حالت، بردار دیگری متشکل از متغیرهای توضیحی با عنوان  $z_t$  با ابعاد  $(k \times 1)$  وجود دارد که ضریب آن را ماتریسی از پارامترها با عنوان  $A'$  و ابعاد  $(r \times k)$  تشکیل می‌دهد. بر این اساس خواهیم داشت:

$$X_t = A'z_t + h_t'\theta_t + n_t \quad (3)$$

$$\theta_{t+1} = G_t\theta_t + w_t \quad (4)$$

برای شروع فرض می‌شود تا دوره‌ی  $t-1$  مشاهده در اختیار است و مقادیر پارامترهای  $A, h, G$  و مقادیر واریانس-کواریانس مربوط به  $n$  و  $w$  مشخص هستند. هم‌چنین  $\hat{\theta}_{t-1}$ ، تخمین زن خوبی (با حداقل میانگین مربع خطا<sup>۱</sup>) از  $\theta_{t-1}$  می‌باشد و ماتریس میانگین مربع خطای<sup>۲</sup> مربوط به  $\hat{\theta}_{t-1}$  که با علامت  $P_{t-1}$  نشان داده می‌شود، محاسبه شده است. در این صورت معادلات مرحله‌ی اول فیلتر کالمن که با عنوان مرحله‌ی پیش‌بینی<sup>۳</sup> شناخته شده می‌شوند، به شکل زیرند.

$$\hat{\theta}_{t|t-1} = G_t\hat{\theta}_{t-1} \quad (5)$$

$$P_{t|t-1} = G_tP_{t-1}G_t' + w_t \quad (6)$$

در حقیقت در این مرحله مقدار جدیدی از  $\theta$ ، یعنی  $\hat{\theta}_{t|t-1}$  تخمین زده شده و مقدار  $MSE$  مربوطه محاسبه می‌شود. اکنون که مقدار جدیدی از بردار حالت موجود است، تخمین زن  $\theta_t$  به شکلی بهینه می‌شود که مشاهده‌ی جدید را نیز لحاظ کند. این عمل در مرحله‌ی به نگرام‌سازی<sup>۴</sup> که معادلات آن به شکل زیر می‌باشند انجام می‌گیرد. خلاصه‌ی فرایند محاسبات این دو مرحله در شکل (۱) به تصویر کشیده شده است.

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta}_{t-1} + K_t e_t \quad (7)$$

$$P_t = P_{t|t-1} - K_t h_t' P_{t|t-1} \quad (8)$$

$$e_t = X_t - A'z_t - h_t'\hat{\theta}_{t|t-1} \quad (9)$$

1- Minimum mean square error estimator.

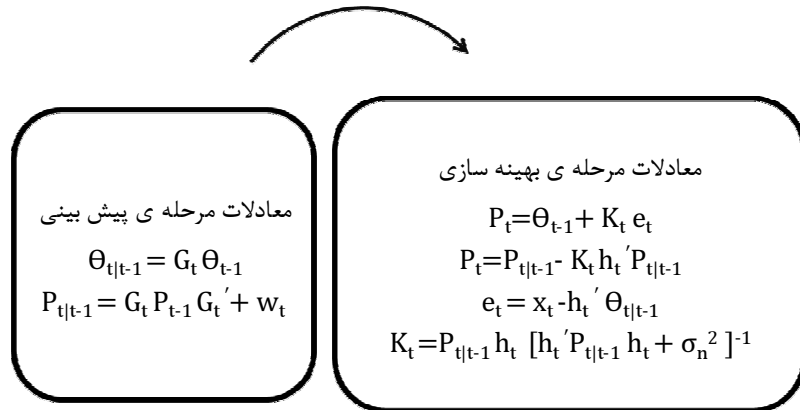
2- Mean square error (MSE) matrix.

3- Prediction stage.

4- Updating stage.

$$K_t = P_{t|t-1} h_t [h_t' P_{t|t-1} h_t + \sigma_n^2]^{-1} \quad (10)$$

در معادلات فوق،  $e_t$  خطای پیش‌بینی<sup>۱</sup> و  $K_t$  ضریب کالمن<sup>۲</sup> نامیده می‌شوند. این روند فیلتر کالمن به صورت بازگشتی ادامه پیدا می‌کند و تمامی مشاهدات مربوط به بردار حالت، تخمین زده می‌شوند. روش ذکر شده، برای فضای حالتی طراحی شده است که از نظر پارامترها خطی می‌باشد و در صورت غیرخطی بودن پارامترها از روش فیلتر کالمن تعمیم<sup>۳</sup> یافته استفاده می‌شود. باید در نظر داشت که برای شروع روند بازگشتی فیلتر کالمن، برای بردار حالت و MSE آن، مقادیر اولیه لازم است، که می‌تواند بر اساس کارهای تجربی حدس زده شده و یا این‌که از روش‌های دیگر مانند محاسبه‌ی امید ریاضی بردار حالت، اندازه‌گیری شود. (چتفیلد، ۲۰۰۴)



شکل ۱- معادلات مراحل پیش‌بینی و بهینه‌سازی (ولچ<sup>۴</sup>، بیشاپ<sup>۵</sup>، ۲۰۰۶)

### ۳- تخمین مدل و تجزیه‌ی تحلیل نتایج

در جهت طراحی فضای حالت به منظور محاسبه‌ی بازدهی بدون ریسک با روش فیلتر کالمن، به دو معادله‌ی مجزا نیاز است، که معرف معادله‌ی مشاهده و معادله‌ی حالت این فضای حالت باشند. برای انجام این کار، از یکی از مدل‌های قیمت‌گذاری

1- Prediction error.  
 2- Kalman gain matrix.  
 3- Extended kalman filter(EKF).  
 4- Welch.  
 5- Bishop.

دارایی استفاده می‌شود. مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی، مدل‌هایی هستند که قیمت دارایی‌ها براساس آن‌ها تعیین می‌شود. این مدل‌ها انواع مختلفی دارند که پایه و اساس آن‌ها را مدل قیمت‌گذاری بر اساس مصرف<sup>۱</sup> تشکیل می‌دهد. اما به این دلیل که این مدل با تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار در ارتباط بوده و مبنای انتزاعی دارد، در کارهای تجربی کاربرد چندانی ندارد. ولی ما مدل CAPM که یکی از مدل‌های قیمت‌گذاری عاملی<sup>۲</sup> به شمار می‌رود، عملاً پرکاربردترین مدل قیمت‌گذاری دارایی می‌باشد. (کوکران<sup>۳</sup>، ۲۰۰۱)، این مدل که در معادله‌ی (۱۱) نشان داده شده است، معادله‌ی حالت مدل ما را تشکیل می‌دهد. لازم به ذکر است که معادله‌ی CAPM براساس تئوری، فاقد عرض از مبدا می‌باشد، اما برای مقاصد تجربی غالباً عبارت عرض از مبدا به آن اضافه شده و به آن مدل بازار<sup>۴</sup> اطلاق می‌شود. (گوجاراتی<sup>۵</sup>، ۲۰۰۳)

$$E(R_{it}) = \alpha + \beta_i E(R_{mt}) + (1 - \beta_i)R_{ft} + z_t \quad z_t \sim N(0, \sigma_z^2) \quad (11)$$

با داشتن معادله‌ی مشاهده، اکنون نوبت به طراحی معادله‌ی حالت مدل می‌رسد. همان‌طور که مشخص است، به دلیل پنهانی بودن متغیر حالت، نوع معادله‌ی سری زمانی آن نیز مجهول می‌باشد. بنابراین با توجه به این‌که متغیرهای سری‌های زمانی به کار رفته در اقتصاد و به ویژه اقتصاد مالی غالباً گام تصادفی و یا خودرگرسیون می‌باشند، روابط مختلفی را به عنوان معادله‌ی حالت مدل در نظر می‌گیریم و مدل را بهینه را براساس معیارهای انتخاب الگو از جمله معیارهای AIC، SIC و HQ<sup>۶</sup>، معناداری معناداری ضرایب و مقادیر متغیر حالت حاصل شده، انتخاب می‌کنیم. بنابراین فضای حالت، چهار مرتبه و با معادلات حالت گام تصادفی بدون عرض از مبدا، گام تصادفی با عرض از مبدا، خودرگرسیون مرتبه‌ی اول و خودرگرسیون مرتبه‌ی دوم تصریح می‌شود.

$$R_{ft} = R_{ft-1} + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2) \quad (12)$$

$$R_{ft} = a_0 + R_{ft-1} + v_t \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2) \quad (13)$$

$$R_{ft} = a_1 + b_1 R_{ft-1} + w_t \quad w_t \sim N(0, \sigma_w^2) \quad (14)$$

$$R_{ft} = a_2 + b_2 R_{ft-1} + C_2 R_{ft-2} + Q_t \quad v_Q \sim N(0, \sigma_Q^2) \quad (15)$$

---

1- Consumption based model.  
 2- Factor pricing model.  
 3- Cochrane.  
 4- Market model.  
 5- Gujarati.  
 6- Hannan-Quinn.

هر یک از معادلات حالت مزبور این قابلیت را دارند که به همراه معادله‌ی مشاهده‌ی تصریح شده، فضای حالت مدل را تشکیل داده و به روش فیلتر کالمن تخمین زده شوند. در این فرایند فرض بر این است که  $z_t$  با هیچ کدام از خطاهای  $u_t, v_t, w_t$  و  $Q_t$  همبستگی ندارد.

### نکات مربوط به تخمین مدل

یکی از نکاتی که حائز اهمیت است، مقادیر اولیه‌ی فیلتر کالمن و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها می‌باشد. با توجه به مانا و یا نامانا بودن متغیر حالت، روش‌های مختلفی برای محاسبه‌ی آن وجود دارد. در (همیلتون، ۱۹۹۴)، اشاره می‌شود که در صورت مانا بودن متغیر حالت، میانگین غیرشرطی<sup>۱</sup> و واریانس غیرشرطی<sup>۲</sup> این متغیر، مقادیر اولیه‌ی آن را تشکیل می‌دهند. و در صورت نامانا بودن آن، مقادیر اولیه‌ی فیلتر کالمن بر اساس حدس و گمان محقق در نظر گرفته می‌شود که در این راستا مقادیر بزرگ‌تر MSE، نشان دهنده‌ی عدم اطمینان بیش‌تر نسبت به مقدار اولیه‌ی متغیر حالت می‌باشد. از سوی دیگر (هاروی<sup>۳</sup>، ۱۹۸۹)، توضیح می‌دهد که در صورت نامانا بودن متغیر حالت، بهتر است از تعدادی از مشاهدات برای تخمین مقدار اولیه‌ی متغیر حالت به روش GLS استفاده شده و واریانس آن به عنوان مقدار اولیه‌ی MSE در نظر گرفته شود. اما چون هیچ‌گونه اطلاعاتی در مورد متغیر حالت به کار رفته در این تحقیق وجود ندارد، مانا و یا غیرمانا بودن آن مشخص نمی‌باشد و از طرف سوی به دلیل این که حالات مختلفی (از جمله گام تصادفی و خودرگرسیون) به عنوان معادله‌ی حالت در نظر گرفته شده است، پیش‌بینی می‌شود که مقدار  $R_f$  محاسبه شده ممکن است در برخی از حالت‌ها (به خصوص معادلات گام تصادفی) نامانا بوده و در حالت‌های دیگر مانا باشد. بنابراین برای محاسبه‌ی مقادیر اولیه‌ی فیلتر کالمن نمی‌توان از رویه‌ی خاصی پیروی کرد. بر این اساس مقدار اولیه‌ی  $R_f$  ماهانه را به صورت ذهنی و با در نظر گرفتن شرایط کلی بازارهای مالی ایران و همچنین انتظارات عواملان اقتصادی از بازدهی یک فرایند سرمایه‌گذاری بدون ریسک، ۰/۰۱۵ در نظر گرفته و MSE متناظر با آن را ۰/۰۰۱ وارد می‌کنیم.

---

1- Unconditional mean.  
2- Unconditional variance.  
3- Harvey.

از مشکلاتی که در برخی از موارد در فرایند تخمین مدل‌های مربوط به فضای حالت رخ می‌دهد، مشکل پایلاپ<sup>۱</sup> می‌باشد (استاک، ۱۹۹۴). این مشکل بدین صورت بروز می‌کند که مقدار واریانس معادله‌ی حالت در فرایند تخمین با احتمال بالایی به سمت صفر میل می‌کند، در حالی که مقدار حقیقی آن به لحاظ آماری تفاوت معناداری با صفر دارد. در این صورت فضای حالت تخمین زده شده فاقد اعتبار بوده و خروجی متغیر حالت متناظر با آن، قابل قبول نمی‌باشد. لازم به ذکر است که در صورت بروز این مشکل، نسبت سیگنال به نویز صفر می‌شود. به عبارت دیگر، در صورتی که مقدار نسبت سیگنال به نویز مغایر صفر باشد، فضای حالت تخمین زده شده با مشکل پایلاپ مواجه نمی‌باشد. این مشکل عموماً در مورد داده‌های نامانای صدق می‌کند، اما در ادامه نشان داده خواهد شد که مقدار نسبت سیگنال به نویز تخمین زده شده در این مدل بزرگ‌تر از صفر بوده و مدل مزبور با این مشکل مواجه نمی‌باشد، که دلیل اصلی آن می‌تواند مانا بودن متغیرهای به کار رفته در مدل باشد.

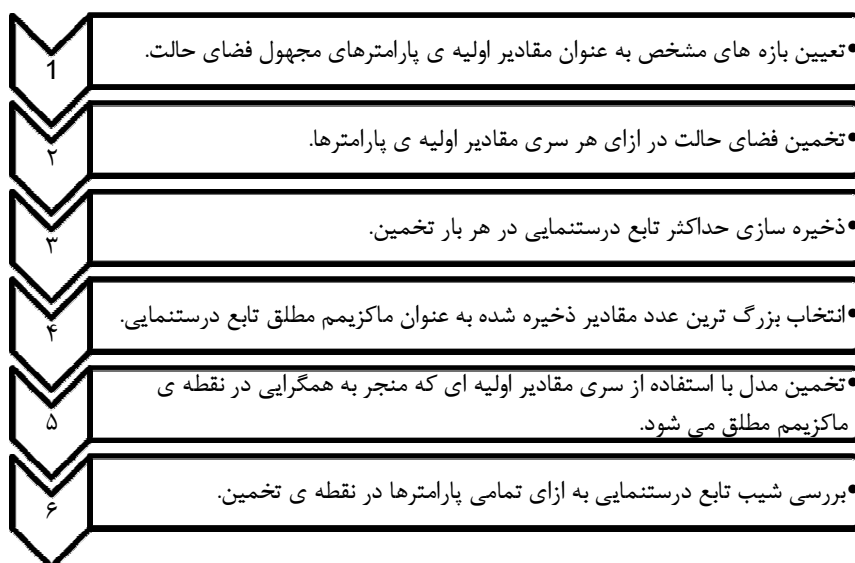
یکی دیگر از مشکلات رایج تخمین متغیر حالت از طریق فیلتر کالمن، پیدا کردن مقادیر اولیه‌ی صحیح برای پارامترهای تصریح شده در مدل می‌باشد. این مسئله به این دلیل بروز می‌کند که مقادیر پارامترهای تصریح شده در فضای حالت به روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده می‌شوند. از سویی تابع درست‌نمایی که بر اساس توزیع مشاهدات به کار رفته در مدل ساخته می‌شود، ممکن است بیش از یک ماکزیمم نسبی، و یک ماکزیمم مطلق داشته باشد، که هدف اصلی هم‌گرایی در نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع درست‌نمایی می‌باشد. اما به دلیل این‌که تمامی نرم افزارها از روش بهینه‌یابی مقداری برای پیدا کردن ماکزیمم تابع درست‌نمایی استفاده می‌کنند، ممکن است نقطه‌ی هم‌گرایی در یکی از نقاط ماکزیمم نسبی رخ دهد که مد نظر نمی‌باشد. به منظور رفع این مشکل، از کد نویسی در نرم افزار Eviews استفاده شده است، به طوری که حلقه‌هایی<sup>۲</sup> طراحی شده‌اند که مقادیر اولیه‌ی پارامترها را به‌طور دائم تغییر داده و فرایند تخمین حداکثر درست‌نمایی را با مقادیر اولیه‌ی متفاوت آغاز می‌کنند. این مشکل بدین صورت برطرف می‌شود که بازه‌های پارامترهای مختلف تشخیص داده شده و این پارامترها در بازه‌های در نظر گرفته شده تغییر می‌کنند و با هر بار تغییر یک پارامتر، فضای حالت تخمین زده می‌شود. با این روش، ماکزیمم‌های بسیاری برای تابع درست‌نمایی محاسبه می‌شود، که بزرگ‌ترین آن‌ها ماکزیمم مطلق تابع می‌باشد. لازم به

---

1- Pile-up problem.

2- Loop.

ذکر است تمامی مقادیر به دست آمده ممکن است ماکزیمم (نسبی یا مطلق) نباشند، که این مسئله با بررسی شیب تابع<sup>۱</sup> در نقطه‌ی هم‌گرایی تشخیص داده می‌شود. شیب تمامی پارامترها در نقطه‌ی هم‌گرایی از طریق نرم افزار Eviews گزارش می‌شوند. مراحل اجرای این فرایند به طور خلاصه در شکل زیر مشخص شده است.



شکل ۲- مراحل تخمین پارامترها در ناحیه‌ی ماکزیمم مطلق تابع درست‌نمایی

### داده‌های مدل

داده‌های استفاده شده در این مدل، داده‌های مربوط به بازار بورس تهران از فروردین ۱۳۷۹ تا اسفند ۱۳۸۷ می‌باشند که در مجموع ۱۰۸ داده‌ی ماهانه را تشکیل می‌دهند. برای متغیر  $R_m$ ، از شاخص قیمت و بازدهی نقدی و برای متغیر  $R_i$  از پرتفولیوی متشکل از شرکت‌های گزارش شده در جدول (۱)، استفاده شده است. این پرتفولیو براساس تئوری پرتفولیوی مارکوویتز<sup>۲</sup> (مارکوویتز، ۱۹۹۱) و به روش وزن‌های بهینه<sup>۳</sup> ساخته شده است. معیار انتخاب شرکت‌های مزبور نیز تعداد معاملات بیش‌تر آن‌ها نسبت به شرکت‌های دیگر، در بازار بورس تهران می‌باشد، که این مسئله (بالا بودن

1- Gradient.

2- Markowitz portfolio theory.

3- Optimum weight.

تعداد معاملات) موجب افزایش نسبی میزان اطلاعات آنها، افزایش کیفیت داده‌های استفاده شده و همچنین افزایش قدرت نقدشوندگی سهام مربوطه و در نتیجه، کاهش ریسک نقدشوندگی می‌شود. لازم به ذکر است که داده‌های مربوط به بازدهی شرکت‌ها با استفاده از قیمت، سود تقسیم شده و افزایش سرمایه‌ی هر شرکت و با فرمول زیر محاسبه شده است:

$$R_{it} = \frac{D_t + P_t(1 + \alpha + \beta) - (P_{t-1} + C\alpha)}{P_{t-1} + C\alpha} \quad (16)$$

$R_{it}$ : بازدهی شرکت  $D_t$ : سود تقسیم شده  $P_t$ : قیمت در دوره‌ی  $t$   
 $P_{t-1}$ : قیمت در دوره‌ی  $t-1$   $\alpha$ : درصد افزایش سرمایه از محل مطالبات و آورده‌ی نقدی  
 $\beta$ : درصد افزایش سرمایه از محل اندوخته  $C$ : مبلغ اسمی پرداخت شده توسط سرمایه‌گذار بابت افزایش سرمایه از محل آورده‌ی نقدی (راعی، تلنگی ۱۳۸۳)

جدول ۱- اسامی و وزن شرکت‌ها

وزن در پرتفو	نماد شرکت	نام شرکت
۰/۱۲	بموتو	موتوژن
۰/۰۳۱	خاور	ایران خودرو دیزل
۰	دپارس	پارس دارو
۰/۰۲۶	سشمال	سیمان شمال
۰/۰۶	سفارس	سیمان فارس و خوزستان
۰/۰۲۹	سکرما	سیمان کرمان
۰/۰۶۳	شپترو	پتروشیمی آبادان
۰/۰۷	شنفت	نفت پارس
۰/۰۹۳	فباهر	مس باهنر
۰/۰۷۷	وبشهر	توسعه‌ی صنایع بهشهر
۰/۰۲۸	ورنا	سرمایه‌گذاری رنا
۰/۳۱	وسپه	سرمایه‌گذاری سپه
۰/۰۳	وغدیر	سرمایه‌گذاری غدیر
۰/۰۳۴	ونیکی	سرمایه‌گذاری ملی ایران
۰/۰۲۴	ویترو	سرمایه‌گذاری پتروشیمی

### تخمین پارامترهای مدل، انتخاب مدل بهینه و تخمین متغیر حالت

با در نظر گرفتن مقادیر اولیه مذکور، اکنون معادله‌ی مشاهده‌ی (۱۱) به همراه هر یک از معادلات حالت، تخمین زده می‌شود تا مدل بهینه به دست آید. جدول (۲)، مقادیر AIC، SIC و HQ مربوط به هر یک از مدل‌ها را نشان می‌دهد. در این جدول عبارت‌های RW (0)، RW (1)، AR (1) و AR (2)، به ترتیب نشان دهنده‌ی معادلات حالت گام تصادفی بدون عرض از مبدا، گام تصادفی با عرض از مبدا، خودرگرسیون مرتبه‌ی اول و خود رگرسیون مرتبه‌ی دوم می‌باشند. در جدول (۳) نیز مقادیر پارامترهای تخمین زده شده، همراه با احتمال آن‌ها آورده شده است.

جدول ۲- مقادیر AIC، SIC و HQ

مرتب	AIC	BIC	HQ
RW (0)	-۳/۱۰	-۳	-۳/۰۶
RW (1)	-۳/۰۹	-۲/۹۷	-۳/۰۴
AR (1)	-۳/۱۰	-۲/۹۵	-۳/۰۳
AR (2)	-۲/۹۱	-۲/۷۰	-۲/۸۳

همان‌طور که از جدول (۳) مشخص است، مدل‌های گام تصادفی با عرض از مبدا و خودرگرسیون مرتبه‌ی اول فاقد واریانس معنادار هستند. بنابراین بدون در نظر گرفتن سایر معیارها، این دو مدل کنار گذاشته می‌شوند. اکنون رقابت بین دو مدل RW (0) و AR (1) است که از منظر معیار AIC هر دو مدل یکسان بوده، ولی بر حسب معیارهای BIC و HQ، مدل گام تصادفی بدون عرض از مبدا از برتری نسبی برخوردار است. لازم به ذکر است که معیار آکائیک به خوبی برازش<sup>۱</sup>، اهمیت بیش‌تری داده و معیار شوارتز، ساده‌سازی<sup>۲</sup> را در اولویت قرار می‌دهد و معیار هنان-کوئین نیز بین این دو می‌باشد. با توجه به نزدیک بودن معیارهای انتخاب الگوی مربوط به این دو مدل و عدم آگاهی قبلی از نوع رفتار  $R_f$ ، برای ارزیابی آن‌ها و انتخاب مدل بهینه، به سراغ مقادیر متغیر حالت برآورد شده بر حسب این دو معیار رفته و رفتار آن‌ها را مورد مقایسه قرار

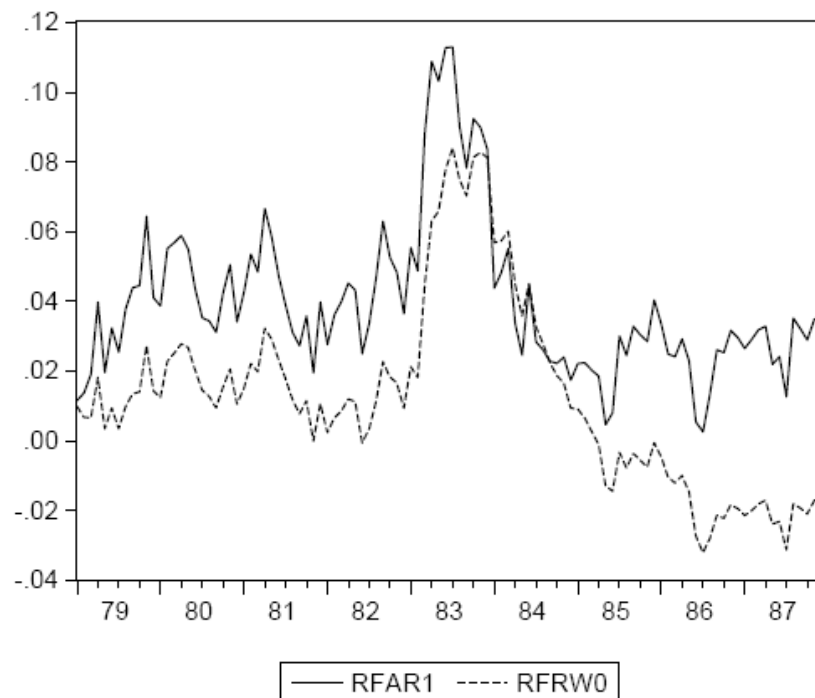
1- Fitting .  
2- Parsimony.



می‌دهیم. نمودار بازدهی بدون ریسکی که بر اساس مدل RW (0) و AR (1) به‌دست آمده، در شکل (۱) ترسیم شده است.

جدول ۳- مقادیر تخمین زده شده‌ی پارامترها

فضای حالت	پارامتر	مقدار پارامتر	S. E	z-Stat	Prob
فضای حالت RW (0)	$\alpha$	۰/۰۱	۰/۰۱۷	۰/۵۸	۰/۵۵
	$\beta$	۰/۶۱	۰/۱۰	۵/۸۵	۰
		۰/۰۰۲۳	۰/۱۱	-۵۴/۱۹	۰
		۵E-۵/۸۷	۱/۵۴	-۶/۲۹	۰
فضای حالت RW (1)	$\alpha$	۰/۰۱	۰/۰۱	۱/۱۳	۰/۲۵
	$\beta$	۰/۶۲	۰/۱۱	۵/۴۵	۰
		۰/۰۰۲۳	۰/۱۱	-۵۲/۱۴	۰
	$a_0$	-۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۵	-۱/۰۴	۰/۲۹
		۰	۱/۶۲	۰	۱
فضای حالت AR (1)	$\alpha$	-۰/۰۰۱	۰/۰۴	-۰/۰۴	۰/۹۶
	$\beta$	۰/۶۱	۰/۱۲	۴/۹۵	۰
		۰/۰۰۲۱	۰/۱۸	-۳۳/۸۷	۰
	$a_1$	۰/۰۰۵	۰/۰۲	۰/۲۷	۰/۷۸
	$b_1$	۰/۸۵	۰/۲۲	۳/۷۷	۰
		۰/۰۰۰۴	۱/۹۷	-۳/۸۶	۰
فضای حالت AR (2)	$\alpha$	-۰/۰۲	۰/۰۳۵	-۰/۶۵	۰/۵۱
	$\beta$	۰/۷۲	۰/۱۴	۵/۱۲	۰
		-۵/۹۳	۰/۱۷	-۳۴/۳۴	۰
	$a_2$	۰/۱۳	۰/۱۳	۰/۹۸	۰/۳۲
	$b_2$	۰/۹۵	۰/۰۴	۱۹/۷۱	۰
	$C_2$	-۰/۹۵	۰/۰۶	-۱۵/۴۵	۰
		۰	۱۴۵۴۰۰۰	۰	۱



شکل ۳- روند تغییرات بازدهی بدون ریسک حاصل شده از مدل AR (1) و RW (0)

همان‌طور که از نمودار فوق مشاهده می‌شود، روند تغییرات هر دو سری از  $R_f$  های تخمین زده شده، شباهت بسیاری به یکدیگر دارد، اما نکته‌ی قابل توجه، مثبت بودن مدل  $R_f$  مدل AR (1) در تمامی دوره‌هاست در حالی که این مقادیر در برخی از دوره‌ها برای مدل RW (0) کوچک‌تر از صفر بوده است که با ادبیات مربوط به بازدهی بدون ریسک سازگار نمی‌باشد. بر این اساس و با در نظر گرفتن تمام شرایط و معیارها، مدل AR (1)، رفتار بازدهی بدون ریسک را بهتر از سایر مدل‌ها برآزش کرده و به عنوان مدل بهینه انتخاب می‌شود. بنابراین فضای حالت نهایی به شکل زیر می‌باشد:

$$E(R_{it}) = \alpha + \beta_i E(R_{mt}) + (1 - \beta_i)R_{ft} + z_t \quad z_t \sim N(0, \sigma_z^2)$$

$$R_{ft} = a_1 + b_1 R_{ft-1} + w_t \quad w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$$

آماره‌ی  $z$  جدول (۳) نشان می‌دهد که تمامی پارامترها به استثنای  $\alpha$  و  $a_1$ ، به صورت معناداری مخالف صفر می‌باشند و یا به عبارت دیگر فرضیه‌ی صفر مبنی بر صفر

بودن پارامترهای مدل رد می‌شود. پارامترهای  $\alpha$  و  $a_1$  به ترتیب عرض از مبدا معادله‌ی مشاهده و معادله‌ی حالت هستند که بنا بر احتیاط کماکان در مدل حفظ می‌شوند. پس از تخمین مدل به روش حداکثر درست‌نمایی، بررسی مقادیر شیب تابع درست‌نمایی در مقادیر پارامترهای تخمین زده شده، ضرورتی به نظر می‌رسد، زیرا همان‌طور که اشاره شد، فرایند حداکثرسازی تابع درست‌نمایی به روش بهینه‌یابی مقداری پیش می‌رود که ممکن است روند حداکثرسازی با خطا مواجه شده و فرایند تکرار قبل از رسیدن به نقطه‌ی ماکزیمم، هم‌گرا شود، بنابراین وضعیت شیب تابع درست‌نمایی در مقادیر پارامترهای تخمین زده شده، در جدول زیر آورده شده است:

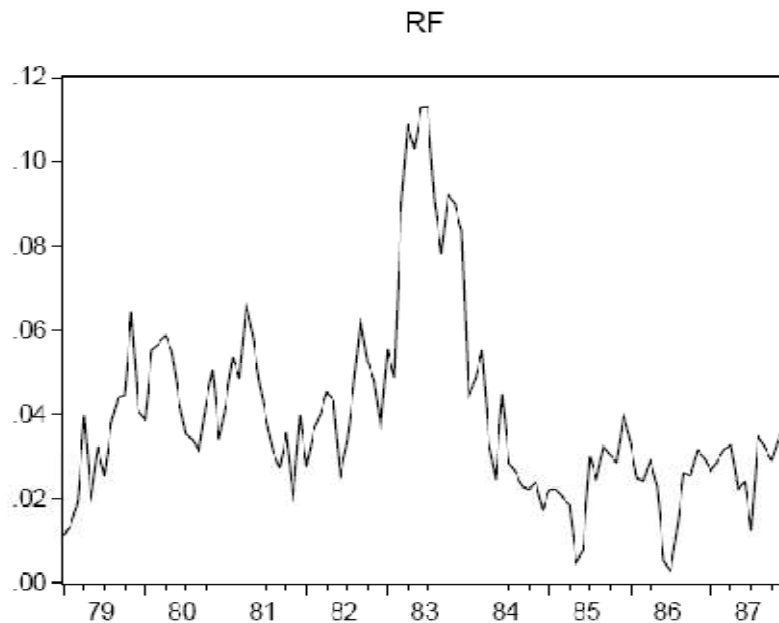
جدول ۴- شرایط شیب تابع درست‌نمایی در مقادیر پارامترهای تخمین زده شده

پارامترها	مجموع	میانگین	Newton Dir
$\alpha$	۰/۰۰۰۵۸	۵/۳۷E-۶	۱/۳۴E-۶
$\beta$	۹/۶۶E-۵	۸/۹۴E-۷	-۱/۶۸E-۶
$\sigma_z^2$	-۴/۵۴E-۵	-۴/۲۰E-۷	-۴/۴۳E-۶
$a_1$	-۰/۰۰۰۱۷	-۱/۵۸E-۵	-۲/۳۰E-۷
$b_1$	-۰/۰۰۰۲۸	-۲/۶۰E-۶	-۷/۳۰E-۶
$\sigma_w^2$	۷/۲۵E-۷	۶/۷۱E-۹	۵/۷۸E-۵

ستون دوم جدول فوق، مجموع شیب تابع درست‌نمایی به ازای مقادیر مختلف پارامترها و ستون سوم، میانگین آن‌ها را نشان می‌دهد. اما مقادیر مورد نظر، ستون چهارم جدول (۴) است که نشان دهنده‌ی شیب تابع در ناحیه‌ی پارامترهای تخمین زده شده می‌باشد که در صورت ماکزیمم بودن تابع درست‌نمایی، این مقادیر باید نزدیک به صفر باشند. بر اساس ستون چهارم جدول فوق، شیب تابع درست‌نمایی در ناحیه‌ی پارامترهای تخمین زده شده به سمت صفر میل می‌کند. پس از تخمین پارامترهای فضای حالت و بررسی مباحث مربوط به آن مقادیر متغیر حالت که برای سال‌های مختلف به روش فیلتر کالمن تخمین زده شده، در جدول (۵)، ارائه شده و نمودار آن در شکل (۲) ترسیم شده است.

جدول ۵- مقادیر بازدهی بدون ریسک تخمین زده شده در هر دوره

تاریخ	R <sub>f</sub>	تاریخ	R <sub>f</sub>	تاریخ	R <sub>f</sub>	تاریخ	R <sub>f</sub>
۰۱M۷۹	۰/۰۱۱	۰۴M۸۱	۰/۰۶۶	۰۷M۸۳	۰/۰۱۱	۱۰M۸۵	۰/۰۳۰
۰۲M۷۹	۰/۰۱۳	۰۵M۸۱	۰/۰۵۸	۰۸M۸۳	۰/۰۹۰	۱۱M۸۵	۰/۰۲۸
۰۳M۷۹	۰/۰۱۹	۰۶M۸۱	۰/۰۴۷	۰۹M۸۳	۰/۰۷۸	۱۲M۸۵	۰/۰۴۰
۰۴M۷۹	۰/۰۳۹	۰۷M۸۱	۰/۰۳۸	۱۰M۸۳	۰/۰۹۲	۰۱M۸۶	۰/۰۳۳
۰۵M۷۹	۰/۰۱۹	۰۸M۸۱	۰/۰۳۱	۱۱M۸۳	۰/۰۸۹	۰۲M۸۶	۰/۰۲۴
۰۶M۷۹	۰/۰۳۲	۰۹M۸۱	۰/۰۲۷	۱۲M۸۳	۰/۰۸۳	۰۳M۸۶	۰/۰۲۴
۰۷M۷۹	۰/۰۲۵	۱۰M۸۱	۰/۰۳۵	۰۱M۸۴	۰/۰۴۳	۰۴M۸۶	۰/۰۲۹
۰۸M۷۹	۰/۰۳۷	۱۱M۸۱	۰/۰۱۹	۰۲M۸۴	۰/۰۴۸	۰۵M۸۶	۰/۰۲۲
۰۹M۷۹	۰/۰۴۳	۱۲M۸۱	۰/۰۳۹	۰۳M۸۴	۰/۰۵۵	۰۶M۸۶	۰/۰۰۵
۱۰M۷۹	۰/۰۴۴	۰۱M۸۲	۰/۰۲۷	۰۴M۸۴	۰/۰۳۳	۰۷M۸۶	۰/۰۰۲
۱۱M۷۹	۰/۰۶۴	۰۲M۸۲	۰/۰۳۶	۰۵M۸۴	۰/۰۲۴	۰۸M۸۶	۰/۰۱۳
۱۲M۷۹	۰/۰۴۱	۰۳M۸۲	۰/۰۳۹	۰۶M۸۴	۰/۰۴۴	۰۹M۸۶	۰/۰۲۶
۰۱M۸۰	۰/۰۳۸	۰۴M۸۲	۰/۰۴۵	۰۷M۸۴	۰/۰۲۸	۱۰M۸۶	۰/۰۲۵
۰۲M۸۰	۰/۰۵۵	۰۵M۸۲	۰/۰۴۳	۰۸M۸۴	۰/۰۲۶	۱۱M۸۶	۰/۰۳۱
۰۳M۸۰	۰/۰۵۶	۰۶M۸۲	۰/۰۲۴	۰۹M۸۴	۰/۰۲۲	۱۲M۸۶	۰/۰۲۹
۰۴M۸۰	۰/۰۵۸	۰۷M۸۲	۰/۰۳۳	۱۰M۸۴	۰/۰۲۲	۰۱M۸۷	۰/۰۲۶
۰۵M۸۰	۰/۰۵۵	۰۸M۸۲	۰/۰۴۶	۱۱M۸۴	۰/۰۲۳	۰۲M۸۷	۰/۰۲۹
۰۶M۸۰	۰/۰۴۳	۰۹M۸۲	۰/۰۶۲	۱۲M۸۴	۰/۰۱۷	۰۳M۸۷	۰/۰۳۱
۰۷M۸۰	۰/۰۳۵	۱۰M۸۲	۰/۰۵۲	۰۱M۸۵	۰/۰۲۲	۰۴M۸۷	۰/۰۳۲
۰۸M۸۰	۰/۰۳۴	۱۱M۸۲	۰/۰۴۸	۰۲M۸۵	۰/۰۲۲	۰۵M۸۷	۰/۰۲۱
۰۹M۸۰	۰/۰۳۱	۱۲M۸۲	۰/۰۳۶	۰۳M۸۵	۰/۰۲۰	۰۶M۸۷	۰/۰۲۴
۱۰M۸۰	۰/۰۴۲	۰۱M۸۳	۰/۰۵۵	۰۴M۸۵	۰/۰۱۸	۰۷M۸۷	۰/۰۱۲
۱۱M۸۰	۰/۰۵۰	۰۲M۸۳	۰/۰۴۸	۰۵M۸۵	۰/۰۰۴	۰۸M۸۷	۰/۰۳۵
۱۲M۸۰	۰/۰۳۴	۰۳M۸۳	۰/۰۸۸	۰۶M۸۵	۰/۰۰۸	۰۹M۸۷	۰/۰۳۲
۰۱M۸۱	۰/۰۴۲	۰۴M۸۳	۰/۱۰۸	۰۷M۸۵	۰/۰۲۹	۱۰M۸۷	۰/۰۲۸
۰۲M۸۱	۰/۰۵۳	۰۵M۸۳	۰/۱۰۳	۰۸M۸۵	۰/۰۲۴	۱۱M۸۷	۰/۰۳۴
۰۳M۸۱	۰/۰۴۸	۰۶M۸۳	۰/۱۱۲	۰۹M۸۵	۰/۰۳۲	۱۲M۸۷	۰/۰۳۶



شکل ۴- مقادیر بازدهی بدون ریسک

نمودار بالا نشان می‌دهد که مقادیر فیلتر شده‌ی بازدهی بدون ریسک تقریباً بین ۱ و ۱۱ درصد در نوسان می‌باشد. میانگین و واریانس این مقادیر به ترتیب برابر  $0/0397$  و  $0/0005$  بوده و آخرین مقدار تخمین زده شده برابر  $0/036$  است که MSE متناظر با آن  $0/00144$  برآورد شده است. بر اساس نمودار فوق، روند  $R_f$  را می‌توان به سه مقطع مختلف تقسیم کرد. از سال ۱۳۷۹ تا اواخر سال ۱۳۸۲، مقادیر بازدهی بدون ریسک بین  $0/02$  و  $0/06$  نوسان کرده و میانگین آن برابر  $0/04$  است. این روند در سال ۱۳۸۳ اوج گرفته و مقدار متوسط آن به  $0/088$  می‌رسد. اما از آغاز سال ۱۳۸۴، بازدهی بدون ریسک بازار کاهش چشم‌گیری داشته و این روند تا اواخر سال ۱۳۸۷ نیز ادامه پیدا کرده، که در این بازه‌ی زمانی میانگین آن برابر  $0/0268$  است.

### آزمون‌های آماری

با توجه به مباحث مطرح شده در مورد نحوه‌ی محاسبه‌ی مقادیر اولیه‌ی فیلتر کالمن و رابطه‌ی آن‌ها با مانایی متغیر حالت اولین آزمون به کار رفته در این مدل،

آزمون ریشه‌ی واحد دیکی فولر تعمیم یافته می‌باشد که بر اساس بازدهی بدون ریسک محاسبه شده و داده‌های مربوط به بازدهی بازار و بازدهی پرتفولیو انجام گرفته است، که نتیجه‌ی آن در جدول (۵) مشاهده می‌شود. این جدول نشان می‌دهد که بازدهی بدون ریسک محاسبه شده، با ضریب اطمینان ۹۹٪ دارای ریشه‌ی واحد بوده، اما این فرضیه در سطح اطمینان ۵٪ تأیید نمی‌شود و به عبارت دیگر فرضیه‌ی صفر مبنی بر نامانای بودن بازدهی بدون ریسک رد می‌شود. هم‌چنین آماره‌ی دیکی فولر، عدم وجود ریشه‌ی واحد در داده‌های مربوط به بازدهی بازار و بازدهی پرتفولیو را تأیید می‌کند.

جدول ۶- آزمون دیکی فولر تعمیم یافته

	آماره‌ی دیکی فولر	Prob
$R_f$	-۲.۹۵	.۰۴۳
$R_p$	-۸.۵۲	.
$R_m$	-۶.۲۰	.

بعد از آزمون ریشه‌ی واحد، نسبت سیگنال به نویز، یکی دیگر از آماره‌هایی است که در مدل‌های فضای حالت مد نظر قرار می‌گیرد. محاسبه‌ی این نسبت که برابر  $(\sigma_w/\sigma_z)$  می‌باشد، با معلوم بودن مقادیر  $\sigma_w$  و  $\sigma_z$  میسر می‌شود. با استفاده از مقادیر این دو متغیر که در فضای حالت محاسبه شده است، نسبت سیگنال به نویز برابر  $۰/۲۲۰$  برآورد می‌شود که بزرگ‌تر از صفر می‌باشد.

اکنون می‌توان مدل CAPM را یک بار با فرض عدم وجود  $R_f$  و بار دیگر با وارد کردن  $R_f$  محاسبه شده، به روش OLS تخمین زد و نتایج حاصل را مورد مقایسه قرار داده دو معادله‌ی (۱۷) و (۱۸)، نتایج تخمین این دو مدل را نشان می‌دهند. همان‌طور که از جدول (۷) پیداست، مقدار بتا در دو معادله تقریباً برابر می‌باشد، ولی تفاوت اساسی در میزان ضریب تعیین است که با وارد کردن بازدهی بدون ریسک در مدل، مقدار آن افزایش می‌یابد. معادله‌ی (۱۹) نیز رگرسیون مربوط به بازدهی بدون ریسک را نشان می‌دهد که به روش OLS برآورد شده است.

$$R_{pt} = \alpha_1 + \beta_1 R_{mt} + \varepsilon_{1t} \quad (۱۷)$$

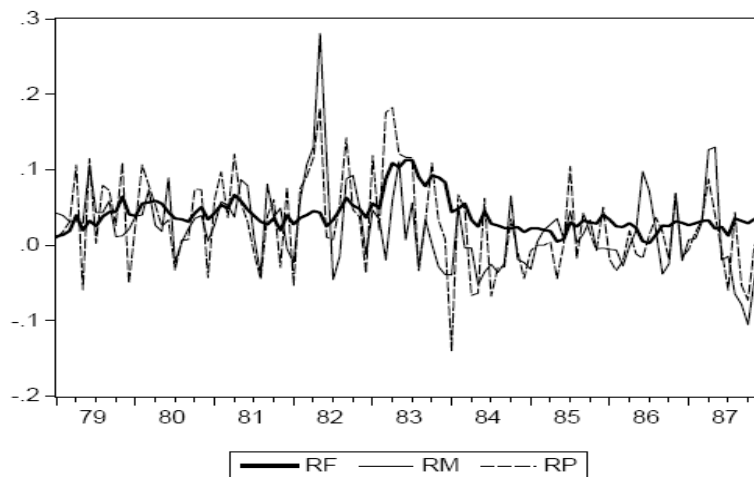
$$R_{pt} = \alpha_2 + \beta_2 R_{mt} + (1 - \beta_2) R_{ft} + \varepsilon_{2t} \quad (۱۸)$$

$$R_{ft} = \omega + \phi R_{ft-1} + \varepsilon_{3t} \quad (۱۹)$$

جدول ۷- نتایج تخمین معادلات ۱۷، ۱۸ و ۱۹

معادلات	پارامتر/ آماره	مقدار پارامتر/ آماره	S. E	t-Stat
معادله‌ی ۱۷	$\alpha_1$	۰/۰۱۲	۰/۰۰۵	-۲/۴۳
	$\beta_1$	۰/۶۴۶	۰/۰۹	۷/۱۴
		۰/۳۲۵	-	-
	DW	۱/۹۶	-	-
معادله‌ی ۱۸	$\alpha_2$	-۰/۰۰۴	۰/۰۰۴	-۰/۹۶
	$\beta_2$	۰/۴۶۹	۰/۰۷۶	۶/۱۷
		۰/۴۷	-	-
	DW	۲/۱۷	-	-
معادله‌ی ۱۹	$\omega$	۰/۰۰۶	۰/۰۰۲۲	۲/۶۷
	$\phi$	۰/۸۵۳	۰/۰۴۹	۱۷/۲۷
		۰/۷۳۹	-	-
	DW	۲/۱۵	-	-

شکل (۳)، مقادیر  $R_f$  محاسبه شده را در مقابل مقادیر ماهانه‌ی  $R_p$  و  $R_m$  به نمایش می‌گذارد. همان‌طور که از شکل زیر پیداست، نوسانات بازدهی بدون ریسک کم‌تر از بازدهی بازار و بازدهی پرتفولیو بوده می‌باشد و از روند نسبتاً ثابتی پیروی می‌کند. هم‌چنین این مقدار در برخی از دوره‌ها برابر بازدهی پرتفولیو بوده و در برخی دیگر بالاتر و یا پایین‌تر از آن می‌باشد که اختلاف بین بازدهی پرتفولیو و بازدهی بدون ریسک، سهم ریسک را نشان می‌دهد که برای دوره‌های مختلف قابل محاسبه می‌باشد. البته باید توجه کرد که نوسانات بازدهی پرتفولیو، کم‌تر از نوسانات بازدهی تک تک شرکت‌ها بوده است و در صورتی که سهم ریسک بر اساس بازدهی شرکت‌ها محاسبه شود، میزان ریسک آن‌ها ملموس‌تر می‌باشد.



شکل ۵- بازدهی پرتفولیو، بازدهی بازار و بازدهی بدون ریسک

### نتیجه‌گیری

بازدهی بدون ریسک در بازارهای مالی از اهمیت بسیاری برخوردار می‌باشد. به دلیل ماهیت بهره در کشورهای اسلامی و از جمله ایران، مقادیر این متغیر، پنهان است. در این پژوهش، به منظور محاسبه‌ی بازدهی بدون ریسک بازارهای مالی ایران از فضای حالت حاصل شده از معادله‌ی مشاهده‌ی CAPM و مدل‌های ARMA استفاده و در آن، متغیر حالت به روش فیلتر کالمن و پارامترهای فضای حالت به روش حداکثر درست‌نمایی تخمین زده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در ابتدا مدل‌های مختلفی به عنوان فضای حالت در نظر گرفته شده و روند فیلتر کالمن برای محاسبه‌ی متغیر حالت با دادن مقادیر اولیه آغاز می‌شود که روش محاسبه‌ی این مقادیر بر اساس روش شرح داده شده در (همیلتون، ۱۹۹۴) انجام گرفته است. هم‌چنین به منظور حصول اطمینان نسبت به دست‌یابی به ماکزیمم مطلق تابع درست‌نمایی، مقادیر اولیه‌ی مختلف برای پارامترهای مدل در نظر گرفته شد و بر این اساس بزرگ‌ترین مقدار ماکزیمم تابع درست‌نمایی به عنوان ماکزیمم مطلق این تابع مد نظر قرار گرفته است. با بررسی نتایج تخمین مشخص می‌شود که معادله‌ی حالت خودرگرسیون مرتبه‌ی اول، بر مدل‌های دیگر برتری دارد. هم‌چنین استفاده از بازدهی بدون ریسک محاسبه شده در مدل CAP، ضریب تعیین مربوط به این مدل را ارتقا می‌دهد. در انتها با مقایسه‌ی نمودار مربوط به بازدهی بدون ریسک با مقادیر بازدهی پرتفولیو و بازدهی بازار، مشخص



می‌شود که نوسانات آن کم‌تر از دو متغیر دیگر بوده و از روند نسبتاً با ثباتی برخوردار است. به طور خلاصه، میانگین و واریانس مقادیر تخمین زده شده به ترتیب برابر ۰/۰۳۹۷ و ۰/۰۰۰۵ بوده و آخرین مقدار به دست آمده، ۰/۰۳۶ است. لازم به ذکر است که در شرایط فقدان نرخ بازدهی بدون ریسک، افق دید سرمایه‌گذاران نسبت به میزان ریسکی که در جهت سرمایه‌گذاری تقبل کرده‌اند، روشن نمی‌باشد. به عبارت دیگر سرمایه‌گذار نمی‌داند که چه میزان از بازدهی که در فرایند سرمایه‌گذاری کسب کرده است، بدون تقبل ریسک میسر شده و چه میزان از آن سهم ریسک او می‌باشد، بنابراین مشخص بودن بازدهی بدون ریسک به شفاف شدن انتظارات عاملان اقتصادی نسبت به آینده و همچنین بررسی عملکرد دارایی‌های آن‌ها در گذشته کمک می‌کند، که این مسئله منجر به افزایش قدرت تصمیم‌گیری افراد نسبت به انتخاب نوع دارایی و یا اجزای پورتفولیو می‌شود.

#### فهرست منابع

- ۱- راعی رضا و احمد تلنگی، ۱۳۸۳، مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها.
- ۲- عباسی‌نژاد حسین و حسین کاوند، ۱۳۸۶، محاسبه‌ی معیاری برای بهره‌وری در ایران با استفاده از رهیافت فیلتر کالمن، فصل‌نامه‌ی پژوهش‌های اقتصادی ایران.
- ۳- گودرزی امیرحسین، ۱۳۸۷، به‌کارگیری فیلتر- کالمن در پیش‌بینی بازار ارز، پایان‌نامه‌ی مقطع کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران.
- ۴- لی لی متقی، ۱۳۷۷، تبادل میان تورم، بیکاری و تولید، رساله دکترا، (راهنما حسین عباسی نژاد) دانشگاه تهران.
- 5- Basdevant O., N. Björkstén and Ö. Karagedikli, 2004, Estimating a time varying neutral real interest rate for New Zealand, JEL classification: E43, E52.
- 6- Burmeister, E., K. D. Wall, J. D. Hamilton, 1986, Estimation of unobserved expected monthly inflation using Kalman filtering, Journal of Business & Economic Statistics, Vol. 4, No. 2.
- 7- Chatfield, Ch., 2004, the Analysis of Time Series: An Introduction, CRC Press.
- 8- Cochrane, J. H. 2001, Asset pricing, Princeton university press.
- 9- Cuaresma, J. C. 2004, Searching for the Natural Rate of Interest: A Euro Area Perspective, Empirica 31: 185–204.

- 10- Damodar N. Gujarati, 2008, Basic Econometrics, McGraw-Hill international editions.
- 11- Douglas Staiger, James H. Stock and Mark W. Watson, 1997, The NAIRU, Unemployment and Monetary Policy, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 11, No. 1.
- 12- Durbin James, Siem Jan Koopman, 2001, Time series analysis by state space methods, Vol. 24 of Oxford statistical science series.
- 13- Greenslade, J. V. R. G. Pierse, J. Saleheen, 2003, A Kalman Filter Approach to Estimating the UK NAIRU, Bank of England Working Paper No. 179.
- 14- Grey Welch, Gary Bishop, 2006, An Introduction to the Kalman Filter, Department of Computer Science University of North Carolina.
- 15- Hamilton, J. D. 1994, Time Series analysis, Princeton university press
- 16- Harry Markowitz, 1991, Portfolio selection: efficient diversification of investments, Wiley-Blackwell.
- 5- Harvey, C. 1989, Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge university.
- 6- Heidari, 1992, Forecast comparison of exchange rate models with the Kalman filter, Technological Forecasting and Social Change Vol. 41, Issue 4.
- 17- Jacques J. F. Commandeur, Siem Jan Koopman, 2007, An introduction to state space time series analysis, Oxford University Press.
- 18- kalman Re., 1960, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering.
- 19- Laubach T., 2001 Measuring the NAIRU: Evidence from Seven Economies, the Review of Economics and Statistics, Vol. 83, no. 2.
- 20- Laubach T., J. C. Williams, 2003, Measuring the Natural Rate of Interest, Review of Economics and Statistics, Vol. 85, No. 4.
- 21- M. R. Barassi, G. M. Caporale, S. G. Hall, 2005, Interest rate linkages: a Kalman filter approach to detecting structural change, Economic Modelling 22.
- 22- Mesonnier, J. S., J. P. Renne, 2007, A time-varying natural rate of interest for the euro area, European Economic Review 51.
- 23- Stock James H., 1994, Unit Roots, Structural Breaks and Trends, Handbook of Econometrics, Vol. 4.
- 24- Thimann P. C., R. Pilegaard, L. Stracca, 2006, The output gap and the real interest rate gap in the euro area 1960–2003, Journal of Policy Modeling 28.