

تعیین اولویت پدیده‌ها با استفاده از خواص بردار و مقدار آیگن

دکتر اسرافیل کسرائی^(۱)

خلاصه مقاله

مقاله زیر^(۲) کاربردی از سلسله مقالات و تحقیقات مربوط به محاسبات مقدار آیگن (Eigenvalue) و بردار آیگن (Eigenvector) جهت پیش‌بینی و کنترل پدیده‌هاست که در آن یک مسأله به صورت ساختار سلسله مراتبی (Hierarchies) نظام‌دار یا سیستماتیک تعریف و بر مبنای پروسه خاص آن (Hierarchy) تحلیل می‌گردد. این روش، تأکید بیشتری به «مجموعه» به صورت یک کل و ساختار آن تا نقشی که اجزای آن ایفا می‌کنند، دارد. بررسی و ارزیابی هر یک از سطوح سیستم، از مقایسه دو بدوی اهمیت یا برتری عناصر برای مقیاس دهی وزنی عوامل در هر سطح و استحصال محتمل‌ترین نتیجه و سپس تعیین بهترین یا با اهمیت‌ترین سناریو از ترکیب احتمال نسبی عوامل مختلف در سطوح مختلف سیستم به ثمر می‌رسد.

در این پروسه با استفاده از روش دلفی (Delphi) و افراد خبره برای نظرخواهی (به‌خصوص در مواقعی که دسترسی به آمار و ارقام مدون کمتر وجود دارد)، به منظور حصول به یک فرآیند سازگار یا اطلاعات معتبری از رویدادها و شاخصهای مورد بحث، و سپس با استفاده از طریق تحلیل حساسیت، تفاوت‌های پیش‌بینی شده یا عدم سازگاری برای بررسی چگونگی قضاوتها (قضاوت‌های ناهمگون افراد) محاسبه و تست می‌شوند.

۱. عضو هیئت علمی دانشکده اقتصاد - دانشگاه تهران

۲. مفاهیم سلسله مراتب در سیستم‌ها (Priority & Hierarchical Structures) اولین بار توسط دکتر سیمون و دکتر آندرو به چاپ رسید. سپس دکتر توماس ساعتی و چند تن از همکاران وی، مفاهیم جدید و ابعاد تازه‌ای به آن افزودند، که در اینجا خلاصه‌ای از ایده اصلی، سنتز ریاضی و کاربردهای ساده، تلخیص و تصنیف شده است.

در قسمتهای زیر پس از مقدمه‌ای کوتاه (در بخش ۲) اصول کلی روش و شرح مختصری از AHP (یا Analytic Hierarchy Process) و در پیامد مفهوم سنتز ریاضی و علمی آیگن، (در بخش ۳) برآورد وزن نسبی پدیده‌ها، (در بخش ۴) تخمین ثروت کشورها از طریق نفوذ آنها بر جهان به‌عنوان نمونه‌ای از کاربرد مسایل مشابه، ارائه و سپس (در بخش ۵) مفاهیم عمومی سلسله مراتب و تعیین اولویت و در خاتمه (در بخش ۶)، نمونه‌هایی از سلسله مراتب چند سطحی در تعیین اولویت پدیده‌ها در یک سیستم و یک نمونه‌های کاربردی دیگر برای تداعی بهتر معانی و مفاهیم ابراز شده است.

در هر قسمت، ورودیهای لازم را می‌توان مستقیماً از طریق صفحه کلید یک ریز کامپیوتر معمولی و با استفاده از بسته نرم‌افزار آماده آن موسوم به «انتخاب خبره Expert Choice» تایپ و تست نموده و یا از طریق برنامه‌های محاسباتی زیربند دیگری که توانائی انجام عملیات ماتریسی در آنها وجود داشته باشد، مقادیر ویژه زیربند را محاسبه و استخراج نمود. در ضمن برای صرفه‌جویی در وقت، بخشی از مفاهیم ریاضی و جداول یا نتایج مفصل تشریحی در ضمایم ارائه شده است.

جهان پیچیده با واکنش‌های متقابل به اشکال مختلفی بر روی زندگی ما تأثیر می‌گذارد. مردم، خانواده‌ها، بنگاهها، یا دولتها در هر کجای این جهان پهناور سعی می‌کنند تا خود را برای فردای نامطمئن آماده نمایند. پیش‌بینی آینده به علت دخالت متغیرهای فراوان، نامطمئن و غالباً احتمالی و اعمال هرگونه کنترل را بسیار مشکل، ناچیز و نامحسوس می‌کند. امروزه، روشهای علمی جدیدی لازم است تا بتوان وضعیت پدیده‌های دنیای نامطمئن فردا را پیش‌بینی و کنترل نمود. ترس ما از اثرات نامطلوب اقدامات امروز، در فردا، ما را مجبور می‌کند، چه از لحاظ فکری و روحی و چه از لحاظ مادی و تکنیکی و چه برحسب ارزشها و دیدگاههای علمی، آرمانها و اهداف فردا را به طور مطمئن طراحی نمائیم. اما چون دانش ما، ارزشها و برداشتهای ما، مرتب در حال تغییر و تحول هستند، چیزهای مهم امروز از چیزهای مهم دیروز و در نتیجه امیدها، اهداف و آرمانهای فردا متفاوتند و ممکن است که در اثر این ویژگیها نتوان امیدوار بود آنها را با دقت و صحت معنی‌داری در آینده ترسیم یا تصویر نمود. تکنیکهای پیش‌بینی شناخته شده، ابزاری برای مقابله با نگرانی، ترس و نارسائیهای آتی

بوده و سعی بر این دارند که از قبل، پیشگویی‌هایی از آنچه را که در آینده‌ای نزدیک ممکن است به وقوع بپیوندد، ارائه دهند، اما در این رابطه اهمیت دو نکته زیر، قابل توجه و توضیح است:

۱- آیا چه رویدادهای مشخصی احتمالاً در آینده به وقوع می‌پیوندند؟

۲- چگونه می‌توان آنها را به نحوی تغییر داد، که فقط وقایع مطلوب رخ بدهند؟

بدیهی است که رویدادها ممکن است به خودی خود بی‌معنا بوده و فقط از نظر اثرات آنها بر ما، یا چگونگی اقدامات، خط مشی‌ها و سیاستها، معنی‌دار یا به نوعی به ما مربوط باشند. در این فصل با استفاده از یک چارچوب سلسله‌مراتبی نشان داده می‌شود که چگونه یک سیستم پیچیده به صورت علی (Causal) تجزیه و تحلیل و به صورت سطوح کوانتومی (Quantum) سازماندهی می‌شود و (با توجه به عدم اطمینان یا ریسک) و با استفاده از استدلال افراد مجرب و خبره، آینده احتمالی را تصویر می‌نماید روش کار می‌تواند به صورت پیشرو (از حال به آینده) یا پسگرا (Backward) از یک آینده ایده آل به حال، با تنظیم اهداف مطلوب و تعیین اینکه چه سیاست‌هایی برای تحقق آنها باید اختیار و اقتباس نمود، عملی می‌گردد.

یکی از نکات اساسی در تئوری‌های تصمیم (Decision Theory)، چگونگی اتخاذ و استخراج وزن (Weights) برای مجموعه‌ای از فعالیتها برحسب اهمیت یا برتری آنهاست. «اهمیت‌ها» معمولاً برحسب چند معیار و ضابطه، مشخص شده مورد قضاوت قرار می‌گیرند و هر ضابطه ممکنست خود به یک یا چند فعالیت (یا چند متغیر) مربوط باشد. ضوابط ممکن است خود به صورت اهداف، ابراز شوند. این پروسه، جزئی از یک پروسه تصمیم‌گیری چند معیاری (Multiple criterion) است که در یک ساختار اولویت دار (Hierarchical structure) به صورت یک نظریه‌ای از مباحث اندازه‌گیری (Measurement) به کار گرفته می‌شود.

در اینجا، منظور اصلی، به کار گرفتن وزنهایی است که اصطلاحاً به آنها اولویت (Priority) اطلاق می‌گردد (مثلاً) برای تخصیص یک منبع مابین چند فعالیت یا چند قسمت، برحسب مرتبه (Rank) یا اهمیت (Importance) آنها در حالتی که تعیین شاخص‌های همگن برای متغیرها غیر ممکن باشد، به کار گرفته می‌شود. در این بررسی، یک روش علمی جدید ارائه شده که علی‌رغم فقدان آمار و ارقام دقیق و مورد نیاز، می‌تواند برتری مؤلفه‌های

مختلف سیستم‌های اولویت دار (بر حسب ضوابط، وزن یا اهداف عالی سطوح بالاتر) را معین نموده و تخصیص منابع یا امکانات را به سادگی میسر سازد. به عنوان مثال، با استفاده از این روش می‌توان اعتبارات هر مجموعه را بر حسب اولویت زیر مجموعه‌ها، با استفاده از متغیرهایی چون درآمد سرانه، فقر، کمبود سرویس‌های خدماتی یا تسهیلاتی، جمعیت و غیره تقسیم نمود. بهره‌گیری از این روش با مقایسه زوجی و همزمان شدت و ضعف نسبی متغیرها در رابطه با یک هدف به صورت یک ماتریس مثبت، (با استفاده از اصول کلی ماتریس‌ها) و استخراج مقدار ویژه و بردار آیگن آنها، تحقق می‌پذیرد.

بنابراین مسأله مهم و قابل توجه تعیین شدت یا قوت نسبی یا اهمیت یک پدیده در رابطه با یک هدف است که در سطوح مختلف، برآیندهای آنها با هم ترکیب و تلفیق شده و در نتیجه یک اولویت کلی برای تمام سیستم حاصل می‌شود. غالباً "اهداف" خود در زیر مجموعه‌ها نیز باید تعیین اولویت گردیده و یا بر حسب مجموعه اهداف برتر یا مطلوب‌تر (سطوح بالاتر)، رتبه بندی شوند. لذا نکته اصلی در این مقاله، ارائه روشی برای اندازه‌گیری وزن اجزای سطوح مختلف سیستم‌های اولویت دار (بر حسب ضابطه یا اهداف عالی‌تر دیگر به طور مستقیم با استفاده از بسته نرم‌افزار موجود در ریز کامپیوترها به نام «انتخاب خبره»^(۱) است.

برنامه ریزی نه تنها تا حد زیادی بستگی به روشها و تکنیک‌های علمی و نظریه‌ها و یا فرضیه‌ها دارد، بلکه مقدار زیادی از آن منوط و مربوط به عوامل روانی، برداشت‌های شخصی و ارزشهای محیطی و فرهنگی می‌باشند. و نیز، سیاستها و اولویتهای خاص ملی، منطقه‌ای و محلی در درجه بندی عوامل و فعالیتها تأثیر بسزائی داشته و ممکن است که احتمال حصول اهداف را به حداقل یا حداکثر تغییر دهد. اگر به فرض، مجموعه سیاستهای

۱. این بسته نرم‌افزار اولین مرتبه در سال ۱۹۸۵ با همکاری بخش تحقیق عملیات (OR) دانشگاه جورج واشنگتن (Washington D.C.) و دانشگاه پنسیلوانیا - فیلادلفیا تهیه و تکمیل و سپس به صورت بسته نرم‌افزاری موسوم به انتخاب خبرگان (Expert Choice) جهت تحقیقات آموزشی و پژوهشی به بازار عرضه شد:

EXPERT CHOICE™, User Manual, Ver. 8, Based on the Analytic Hierarchy Process,

Expert Choice, Inc. 1993

کنونی و آینده مطلوب و دلخواه یک جامعه در دست باشد، تحلیل کیفیت و کمیت عوامل و متغیرهای وابسته یا اصلی، بتنهایی می‌تواند در جامه عمل پوشانیدن اهداف، بی‌نهایت مفید واقع افتد. بدیهی است در شرایط زمانی و مکانی مختلف، کارآئی و روابط این متغیرها متفاوت و اولویت فعالیتها باید مطالعه و تخمین یا درجه‌بندی شوند^(۱). بطور کلی آنچه که بیشتر حائز اهمیت است، پاسخگویی به سه نکته اساسی زیر در حل مسائل فوق می‌باشد:

(۱) - چگونگی تعیین وزن و درجه بندی یک عنصر در رابطه با عناصر دیگر

(۲) - چگونگی ارزیابی شدت اهمیت عوامل و فعالیتها در یک سطح

(۳) - چگونگی تعیین اولویتها در سطوح مختلف

پروسه تحلیل سلسله مراتب (AHP) با ایده سازگاری افکار ارتباط داشته و با توجه به عدم سازگاری، اثر سطوح مختلف سازگاری، روی فرآیند پروسه را اندازه می‌گیرد. این عمل با همکاری خبرگان و افراد ذیصلاح و برای انجام یک هدف خاص یا مسأله خاصی دنبال می‌شود^(۲).

سنتزهای حاصل در نوشته‌های ذیربط (AHP) طبق ادعاهای اخیر پیشگامان این

۱. برای بررسی کارآئی و ارتباط آن با اهداف برنامه ریزی به مقاله زیر رجوع شود:

J. R. Emshoff & T.L. Saaty, Priorities Hierarchies as a vehicle for long range Planning,

May 1977, Working paper 1977, Wharton Applied Research Center, University of

Pennsylvania, Phla.

۲. روش دلفی، یک روش سیستماتیک و تکراری (با دوره‌های متوالی تبادل نظر)، متکی به قضاوت گروهی از متخصصین آگاه برای تعیین و تبیین یا پیش‌بینی وزن شاخص‌های طراحی شده است. این فرایند بدون توجه به انتقادات یا عواقب آتی یک پیشنهاد در محیطی کنترل شده آغاز و تدوین سناریوهای مختلف از طریق تشریح و آنالیز ارتباطات - به طور حسی و غیراستدلالی، ایده‌آل و بدون شناسائی افراد جهت قبول یا رد عقاید آنها از طریق ارزشیابی (با بازده بالا) - انجام می‌گیرد. پیشنهادات و عقاید یک پیش‌بینی‌کننده (غالباً به صورت کتبی و سری) برای رسیدن به یک هدف مطلوب و قابل قبول اکثریت باهمگان، لازم و ضروری است. زیرا طبق نتایج حاصل از مطالعات وسیع روان‌شناسان که بیانگر وجود یک سری اشکالات اساسی جدی در مصاحبه‌های حضوری است، استفاده از عقاید و افکار و نظرات گروهی بر استفاده نظرات شخصی و فردی ارجحیت داشته و دقت یا خطاهای تخمین گروه به مراتب کمتر از حد متوسط اشتباهات فردی است.

ایده، ارائه کاربردهای زیر است (۱):

- ۱ - تعیین اولویت ها
- ۲ - ایجاد مجموعه‌ای از گزینه‌ها
- ۳ - انتخاب بهترین خط مشی یا گزینه
- ۴ - تخصیص منابع
- ۵ - پیش‌بینی نتایج (در رابطه با زمان)، تخمین ریسک (Risk)
- ۶ - اندازه‌گیری عملکرد
- ۷ - تأمین ثبات یک سیستم
- ۸ - رفع تناقض (Conflict Resolution)

به طور کلی برای به کارگرفتن این پروسه، ابتدا باید نیازهای سیستم را تعریف و سپس گزینه‌های مختلف و مطلوبی را ایجاد نمود. در نهایت، اولویتها بر حسب اهمیت نیازها، به جهت تحقق بخشیدن به گزینه‌ها برای دستیابی به اهداف عالی تر معین و مقرر می‌شوند و سرانجام بهترین گزینه یا ترکیبی از گزینه‌های مختلف انتخاب می‌شود. بنابراین در هر یک از کاربردهای سابق‌الذکر تخصیص منابع را باید تعریف نموده و سناریوهای مختلفی که برای تحقق آنها از طریق اجرای سیاستها ممکن می‌شود، تعیین نمود.

۲ - اصول کلی روش و شرح مختصر AHP

AHP (Analytic Hierarch Process) یک شیوه جبری، یک شیوه مقیاس نسبی^(۲) تصمیم‌گیری است. این فرآیند تصمیم‌گیری چند معیاری در سطوح مختلف یک ساختار سلسله مراتبی، یا سیستمی از شبکه‌های چند قسمتی ضوابط^(۳) یا زیر مجموعه‌ها، که هدف آن محاسبه اولویتها یا درجه‌بندی فعالیتها، با توجه به کمبود و فقدان آمار و ارقام صحیح یا روابط

1 - T. L. Saaty and L. G. Vargas, Prediction and Forecasting, Application of the Analytic Hierarchy Process in Economics, Finance, Politics, Games and Sports, Kluwer Academic Publication, 1991, PP. 12 - 13.

2 - Ratio - scale

3 - Multi component network systems of criteria

کمی صریح^(۱)، برای ارزیابی به کار می‌رود. به طور مثال، تخصیص منابع به چند فعالیت یا به چند ناحیه و یا اجرای طرحی از بین مجموعه طرحها در مواقعی که آحاد همسان و یکنواختی برای مقایسه آنها در دست نبوده و یا دیدگاههای متفاوتی در تصمیم‌گیری برای هر یک وجود داشته باشد، صورت می‌گیرد. مسأله اصلی تعیین شدت و ضعف نسبی هر عامل در رابطه با عوامل موجود همگن دیگر در هر سطح در رابطه با یک خاصیت یا ویژگی مشترک است، که در نتیجه این درجه‌بندیها استحصال یک سری مقادیر عددی به‌عنوان اولویت مطمح نظر است. این روش دارای دو مرحله کلی زیر می‌باشد:

مرحله اول، اهمیت نسبی عوامل در یک سطح تعیین می‌گردد و اگر سیستم یا ناحیه، محدود به یک سطح باشد، تخصیص منابع به سادگی صورت می‌گیرد.

مرحله دوم شامل تعیین اولویت چند سطح با مطالعه اثرات منتج آنها می‌باشد که از ترکیب یک سطح و سطوح بالاتر استنتاج می‌گردد.

سنجش وزن از طریق مقایسه زوجی عوامل با یکدیگر در یک ماتریس انجام گرفته و سپس اولویتها از طریق محاسبه بزرگترین مقدار آنگن (Eigenvalue) و بردار آنگن (Eigenvector) آنها تعیین می‌گردد. شدت اهمیت عوامل، دو بدو با هم، بر حسب اعداد (اصلی) با توجه به تفاوتها یا برتریهای نسبی آنها، سنجیده می‌شود. اختلاف نسبی اعداد، شاخص تعیین‌کننده نسبت اهمیت یا اولویت عوامل در رابطه با یک مبنا (زیر سیستم یا کل سیستم)، است.

به طور مثال، اگر n تعداد فعالیت یا بطور ساده تر، n تعداد وزنه a_1, \dots, a_n به وزنها مشخصی مانند w_1, \dots, w_n در دست باشد ($i, j = 1, 2, \dots, n$)، تشکیل یک ماتریس مربع مانند A که در هر سلول آن، a_{ij} حاصل نسبت دو وزن یا تخمین نسبتی از وزنها (w_i/w_j) است، به سادگی عملی می‌باشد.

این ماتریس می‌تواند نمایانگر مجموعه‌ای از روابط یا فعالیتهای یک قسمت (یا یک زیرسیستم) باشد. هر سطر این ماتریس، بیانگر نسبت وزن یک وزنه بر حسب وزنه‌های دیگر بوده و از ضرب ماتریس A در برداری مانند W ، حاصل می‌شود.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\
 A_1 & w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\
 A_2 & w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_n & w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n
 \end{array} \right]
 \begin{bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 \dots \\
 w_n
 \end{bmatrix}
 = n
 \begin{bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 \dots \\
 w_n
 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

برای تحلیل بیشتر مقیاس ماتریس نسبتها باید اتحاد $AW = nW$ یا دستگاه معادله $(A - nI)W = 0$ را حل نمود. این رابطه، یک دستگاه معادله خطی همگن بوده و به شرط اینکه دترمینان جمله $(A - nI)$ صفر باشد، دستگاه دارای جواب بوده و n مقدار آیگن ماتریس A می شود مرتبه (یا Rank) ماتریس A به دلیل اینکه هر سطح آن تقریباً ضریب ثابتی از سطر دیگر است، حدود یک بوده و تمام مقادیر ویژه آیگن آن بجز یکی برابر با تقریباً صفر می شود. چون حاصل جمع مقادیر ویژه آیگن یک ماتریس یعنی $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ برابر اثر (Trace) آن ماتریس است، در نتیجه اثر A مساوی n بوده و n مقدار آیگن غالب λ_{\max} آن می شود^(۱).

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Trace}(A) = n$$

= مجموع اجزای قطری ماتریس A

برای ساختن یک W منحصر بفرد (Unique) می توان سلول های بردار را نرمال سازی (Normalize) نمود. بنابراین با داشتن ماتریس نسبتها، یعنی A (نسبت وزنها و وزنه ها) مقیاس آن را می توان بهبودی بخشید، که در این حالت هر ستونی از ماتریس نرمال سازی شده جواب می باشد. توجه شود که رابطه $a_{ji} = 1/a_{ij}$ برای هر i و j صادق بوده و $a_{ii} = 1$ است. همچنین A یک ماتریس سازگار بوده و به عبارت ساده تر شرط $a_{jk} = a_{ik} / a_{ij}$ برای تمام سلولهای i, j, k نیز صادق است.

در کاربردها، هر سطحی از فعالیتها منجر به حل و محاسبه مقدار ویژه و بردار آنگن ماتریسی مانند A می شود. در چنین ماتریسی وقتی اجزا از اعداد مثبتی باشند، قضیه پرون - فروبنوس^(۱) (Perron - Frobenius) وجود یک مقدار آنگن غالب (Eigenvalue) و یک بردار آنگن منحصر به فرد (Unique) را تضمین می کند. معمولاً این بردار را با تبدیل مجموع اجزای آن به یک، نرمال سازی می کنند. بنابراین مجموعه فعالیتها در پایین ترین سطح، بر حسب ضوابطی از سطوح مافوق، دارای برداری از وزنها خواهد بود که این بردار از یک ماتریس اصلی A و از طریق مقایسه دو به دو عوامل با یکدیگر منتج می گردد. حاصل این بردارها در هر سطح با هم ترکیب و به صورت ستونهای یک ماتریس جدید در سطح بعدی متجلی می شوند، که موسوم به ماتریس اهمیت بوده و این ماتریس اهمیت در هر سطحی از سطوح بعدی به ترتیب در ماتریس (یا بردار) اهمیت سطح بالاتر بعدی نیز ضرب می گردد. اگر سطوح بالای سیستم فقط منحصر به یک سطح (یا یک هدف) باشد، ماتریس وزنها حاصل فقط به صورت یک بردار درآمده و اجزای این بردار، اولویت نسبی فعالیتها را در آن سطح سیستم نشان می دهد. (اگر سیستم دارای چند سطح باشد، این بردار از ضرب یک ماتریس و یک بردار حاصل و در جهت تحقق بخشیدن اهداف سطوح بالاتر ارائه می شود). مثلاً در یک سیستم محدود و بسته، تخصیص منابع یا توزیع نسبی منابع، با نرمال سازی کل اعتبار موجود به مجموع اجزای بردار اولویت، مشخص می شود. ولی اگر سیستم دارای چند سطح مختلف باشد، باید بردار اولویت نهایی برای تخصیص مطلوب منابع از آنها استحصال شود.

باید توجه داشت که در حالت کلی نمی توان مقادیر دقیق w_i / w_j را بیان نمود بلکه فقط می توان آنها را تخمین زد. در این تخمین، تأکید اصلی بر روی سازگاری و جمع بندی قضاوتهای هماهنگ افراد متخصص (سازمانهای) مسؤل یا سیاستهای خاص ملی و منطقه ای برای تصمیم گیریها است.

۲ - برای اثبات قضیه ها و احکام و توضیحات بیشتر به مقاله های زیر رجوع شود:

1 - Thomas L. Saaty, "A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures", Journal of Mathematical Psychology, 1977, 15, PP. 234-281;

2 - F. R. Gantmacher, the Theory of Matrices, Vol. II, New York, Chelsea, 1960, PP. 53 and 60.

طبق تئوری ماتریس‌ها، پریشدگی جزئی (Perturbation) در ضرایب، باعث پریشدگی ناچیزی در مقادیر ویژه آنگن می‌شود. در بیشتر کشورهای جهان سوم که تعیین اولویت فعالیت‌ها یا پدیده‌ها به صورت کمی، به علت نبود آمار و ارقام دقیق مورد نیاز، غیر ممکن است، این پروسه، راه حل عملی مناسب و ایده آلی خواهد بود. بنابراین از نظر تئوری، «سازگاری» شرط لازم برای اطمینان از صحت محاسبات، وجود یک شرط یا یک رابطه منطقی می‌باشد. به عنوان مثال ممکن است بر حسب ضرورت‌های ملی، منطقه‌ای یا ناحیه‌ای هریک از امکانات مانند تأمین آب، کود شیمیایی و بذر، علوفه و دام، اعتبار یا وام، ماشین آلات و غیره از اهمیت خاصی برخوردار باشند، که از مقایسه دو بدوی آنها، اهمیت ترکیب عوامل، نسبت به هم روشن می‌شوند. این روش بر مبنای تئوری سازگاری برای معرفی مسائل روزمره واقعی، شیوه خاصی را به کار گرفته که کیفیت قضاوتها را بررسی نموده و اگر در ارزیابی و سنجش عوامل، ناهماهنگی و ناهمگونی موجود باشد از طریق استانداردها و روابط مخصوص، این نوع اشتباهات قابل تشخیص و تخفیف می‌باشند.

در نتیجه مسأله اصلی منجر به حل $A'W' = \lambda_{\max} W'$ شده که در آن λ_{\max} مقدار آنگن غالب ماتریس A می‌باشد. ولی به جهت سهولت در محاسبات، می‌توان بحث را با همان رابطه $AW = \lambda_{\max} W$ که در آن ماتریس A ماتریس نسبتها می‌باشد، ادامه داد. باید توجه کرد که آیا حل بردار آنگن غالب یا W ، در رابطه با مقادیر ویژه آنگن غالب که اهمیت نسبی فعالیتها یا عوامل مورد بحث را نشان می‌دهد، به چه نسبت «خوب» برآورد می‌شود؟ (مثلاً اگر گزینه E برگزیده F ارجحیت داشته باشد جزء ذیربط بردار آنگن E که به صورت اعداد ترتیبی (Ordinal) در بردار W ارائه می‌شوند، بزرگتر از F خواهد بود؟ سازگاری (Consistency) اطلاعات گردآوری شده یا حتی متعددی بودن آنها (Transitive) ضروری نبوده بلکه (شرط کافی) کیفیت ارزیابیها به وسیله محاسبات مشخصی تعریف و اندازه گیری می‌شوند^(۱).

ممکن است فردی سؤال کند که آیا اگر قضاوت پدیده‌ای کاملاً تصادفی (Random) باشد، نتیجه چه می‌شود؟ بلی سازگاری اطلاعات در چنین مواردی به مراتب بدتر از موقعی

۱. متعددی در حالتی است که برای مثلاً سه متغیر مانند X, Y, Z اگر $X > Y$ و $Y > Z$ باشد، سپس $X > Z$

است که توسط افراد خبره قضاوت و استدلال شده باشد. رابطه $\lambda_{\max} = n$ به عنوان شرط لازم برای سازگاری ابراز گردیده و مقیاس ترتیبی اعداد ۱ تا ۹ برای مقایسه شدت اهمیت نسبی متغیرها معرفی شده است. برای اثبات ثنوری از چند مثال که جواب آنها قبلاً مشخص بوده استفاده می‌شود، تا عملکرد روش ارائه شده توجیه شده و سپس فرآیند به تصمیمات چند معیاری نیز بسط و گسترش داده شده و ایده سلسله مراتب در سیستم‌ها و همچنین مسأله تجزیه (Decomposition) یک سیستم بزرگ به چند زیر سیستم معرفی گردیده و با استفاده از روش محاسبه مقدار آنگن، بردار اولویت و ماتریس اولویت و در نتیجه اولویت نهایی سیستم تعیین شود. (طبق نظر کارشناسان روان شناس، ظرفیت و پتانسیل تحلیلی مغز انسان برای افراد عادی، هفت ضابطه یا موضوع، همزمان و برای افراد ضعیف تر یا قوی تر برابر با $7 \pm$ می‌باشد. در مواقعی که تقسیمات بیش از حد اکثر باشد، باید آن تعداد از سطوح مازاد را به چند زیر مجموعه تجزیه و سپس در داخل هر مجموعه مجدداً از ایده فوق استفاده نمود^(۱)، لذا تمام این قضاوتها و ارزیابیها باید با توجه به محدودیت ظرفیت و مقایسه همزمان متغیرها در مغز انسان در مد نظر باشند.

در اینجا چنین به نظر می‌رسد که ممکن است توضیح بیشتر در مفاهیم مقدار ویژه (و بردار ویژه) آنگن به عنوان کلید یا رمز اصلی در تفهیم مطالب، مؤثر واقع شود. در حقیقت معادله $AW = nW$ یک انتقال و تبدیل ساده‌ای از معادله قدیمی $AX = B$ ، به معادله جدید $(A-nI)W=0$ است که در آن n مقدار آنگن و W بردار آنگن می‌باشد. اگر معادله در ترمینان برای عبارت $(A-nI)$ بسط داده شود، یک چند جمله‌ای درجه n موسوم به معادله ویژه (Characteristic equation) ماتریس A به دست می‌آید^(۲).

برای توجیه مفهوم آنگن اگرچه این مفهوم یک سنتز ریاضی بوده و تفهیم آنها در دنیای

1 - Miller, G.A. "The magical number, seven plus or minus two, some limits on our capacity for processing information," *The Psychological Review*, 63 (1956), PP. 81-79.

۲. برای محاسبه W ، دستگاه معادله همگن $Det (A - \lambda I)W=0$ باید حل شود که در آن I ماتریس یکه و هم اندازه با A است. اگر $|A-nI| = 0$ یا در ترمینان ماتریس (Characteristic Equation) صفر شود: $n \neq 0$ یا $\lambda \neq 0$ قابل استحصال است.

$$Det (A - \lambda I) = b_n \lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \lambda + b_0 = 0$$

واقعی بسیار مشکل است، اما تداعی معانی و اهمیت علمی و فیزیکی آنها در علوم جدید بسیار با اهمیت می باشد:

شاید ساده ترین مثال، عبور سربازان از روی پل ها باشد. مطابق سنت قدیم، آنها از رژه رفتن بر روی پل ها خودداری نموده و فقط (اغلب به طور نامنظم) به عبور عادی از آن اکتفا می نمایند. دلیل این امر این است که اگر فراوانی (Frequency) ضربه قدمهای سربازان به طور تصادفی مساوی یکی از مقادیر ویژه آیگن پل شود، در آن صورت پل شروع به ارتعاش، لرزش و ریزش خواهد نمود. مثال دیگر مشابه، «تاب های بازی» بچه ها است که وقتی فراوانی طبیعی نوسان یک تاب، مساوی مقدار آیگن تاب دیگر شود، تاب دوم نیز خود بخود شروع به اوج گرفتن می کند. در این رابطه مهندسین مجرب در ساختن پل ها و موشکها سعی می کنند که فراوانی طبیعی موشکها، متفاوت از مقدار آیگن صدای آگروز آنها باشد. متشابهاً در پدیده های اقتصادی، مقادیر ویژه آیگن، نرخ رشد یا رکود را نشان داده^(۱) و بردار آیگن، نمود این پدیده ها را با این میزان مشخص می کند. مثال دیگر برای تداعی معنی بردار آیگن، مدار کره زمین است. مدار گردش کره زمین را مجسم کنید که در آن در هر محور کره، نقاطی در قطب شمال و قطب جنوب وجود دارند که هرگز به دور محور خود نچرخیده و همیشه ثابت هستند. این قطب ویژه، بردار آیگن است که در آن مقدار آیگن معادل با واحد است. واضح است که تمام نقاط دیگر کره در حال حرکت بوده و هیچ بردار آیگن دیگری در آن وجود ندارد^(۲)، بدین ترتیب مقادیر ویژه آیگن شاید مهمترین ترکیب عملی و علمی هر سیستم پویا می باشد که در اینجا به یکی از جوانب ساده آن در تعیین اولویت نهایی یک زیر سیستم (Subsystem) در رابطه با یک سیستم اجتماعی - اقتصادی یا سیستم های مشابه دیگر اشاره شده است.

۱. برای مثالهای عددی و کاربردهای برنامه ریزی و رشد به منبع زیر رجوع شود:

Andrei Rogers, Matrix Methods in Urban & Regional Analysis, Holden-Day, 1971.

۲. برای اثبات به کتاب زیر مراجعه گردد:

Gilbert Strang, Linear Algebra and Its Applications, MIT, Academic Press, 1976, PP. 6 and 175.

۳ - برآورد وزن نسبی پدیده‌ها^(۱)

روش زیر، کاربردی از تئوری‌های آماری مشاهدات ۵۰ نمونه تصادفی از نظریات مردم یا تخصص‌های مختلف می‌باشد. پس از مقایسه هر یک از فعالیت‌های نام با فعالیت‌های نام تعیین وزن a_{ij} و وزن دهی نسبی متغیرها، باید معکوس وزن $1/a_{ij}$ را برای سلول a_{ij} اختصاص داد. به عبارت دیگر، اگر وزن یک وزنه k برابر، از دیگری سنگین‌تر تخمین زده شود، وزنه دوم، $1/k$ اولی خواهد بود (معمولاً نخست عدد بزرگتر از واحد باید در جدول ثبت شود). بدیهی است با این خصوصیات، طبق اصول ماتریس‌ها، ماتریس استحصال شده، سازگار و مرتبه آن برابر با واحد می‌باشد که در این حالت با داشتن یک ردیف از آن، بقیه اجزای ماتریس قابل محاسبه خواهد بود (یکی از خواص این نوع ماتریس‌های معکوسه، داشتن اجزای قطری واحد $a_{ii} = 1$ است). در این حالت اگر ماتریس A دارای n عامل باشد، مجموعاً $[n(n-1)/2]$ تعداد مقایسه ضرورت دارد. لازم به یادآوری است که وزنها الزاماً نباید ترتیبی (اولین، دومین، و...) یا متعددی (Transitive) باشند. یعنی اگر اهمیت نسبی C_1 بزرگتر از C_2 و اهمیت نسبی C_2 بزرگتر از C_3 باشد (نظیر آنچه که در پدیده‌های روزمره ممکن است اتفاق بیفتد)، ضروری نیست که رابطه و نسبت اهمیت C_1 حتماً بزرگتر از C_3 باشد. به عنوان مثال ممکن است در مسابقه‌ای تیم C_1 نتواند در مقابل تیم C_2 مقاومت کند و مغلوب آن گردد و تیم C_2 نیز به ترتیب مغلوب تیم C_3 شود. دلیلی نیز وجود ندارد که تیم C_1 نتواند مسابقه را به نحوی از تیم C_3 نبرد. اما رفتار تیم‌ها در این شرایط ناسازگار هستند. در حالت طبیعی در فرموله کردن و درجه‌بندی وقایعی نظیر مثال فوق، حقایق انکار ناپذیری وجود دارد که در اینجا نیز پذیرفته شده و قابل انطباق می‌باشند.

مسئله‌ای که در اینجا مطرح می‌شود، کمیت و کیفیت مقایسه و ارزیابی پدیده‌ها یا فعالیتها می‌باشد. استفاده از ارقام و اعداد طبیعی در این روش و در تمام موارد آن ضروری است. دامنه عناصر کمتر از ۱۰ ($n < 10$) بهترین نتایج را در آزمایشهای علمی، به خصوص در علوم نظیر فیزیک، اقتصاد و روان‌شناسی نشان داده است. توجه به این نکته بسیار حائز اهمیت است، افرادی که در منصب قضاوت و مدیریت قرار می‌گیرند باید از تمام کم و کیف یا دامنه ارزشها مطلع بوده و باید به نحو گویائی توانائی ابراز تفاوت‌های مستدل برداشتها،

۱. برای توضیح بیشتر به مقاله دکتر ساعتی سال ۱۹۷۷ رجوع گردد.

پدیده‌ها، زیر مجموعه‌ها و مبناهائی را که برای مقایسه به کار می‌گیرند، داشته باشند. مراحل مقدماتی ساختن جدول وزنها، از تقسیم نسبی دو بدوی وزن ضوابط یا درجه شدت اهمیت آنها شروع می‌شود. لازم به تذکر است که شرط لازم برای ارزیابی و قضاوت، شناخت اهمیت و ارزش نسبی ابعاد تمام اجزا و عواملی است که مورد مقایسه قرار می‌گیرند. شدت نسبی یا درجه اهمیت‌ها، نزدیک‌ترین عدد صحیح و رقمی بین ۱ تا ۹ خواهد بود. در صورت اجبار، معمولاً نزدیک‌ترین رقم، یک عدد تقریبی خواهد بود که در آن ۹ بالاترین و ۱ پایین‌ترین حد آن می‌باشد (رقم صفر در این وزن بندی حذف شده است). مقادیر معکوس تمام اجزا مستقیماً و بدون ارزیابی مجدد، در ماتریس قرار داده می‌شوند.

در اینجا سعی بر اینست که مشخص شود دامنه مقایسه‌ها تا چه حد می‌توانند تفاوت و وسعت داشته باشند. طبیعی است که نمی‌توان اشیاء بسیار متفاوت را با یک مقیاس اندازه گرفت. مقایسه یک اتم یا یک ستاره با معیارهای معمولی، کیفیت اندازه‌گیری را غیر قابل درک و اغراق‌آمیز می‌نماید. برای تفهیم چنین کیفیتی تقسیم و تجزیه اشیاء به گروه‌ها و دسته‌های همگن، عملی‌تر و منطقی‌تر خواهد بود. در این صورت وزن‌بندی گروه‌های مختلف، درجه‌بندی و ارتباط آنها را از یک سطح به سطح دیگر به طور ساده‌تر، امکان‌پذیر می‌نماید که شرح این نوع تقسیم‌بندیها در قسمتهای بعد تشریح خواهد شد. به هر حال در این مرحله، وزنهای نسبی تقریبی بدست آمده و صحت محاسبات، مسأله‌ای است که بستگی به قدرت مغزی افراد تحلیل‌کننده و برداشت افراد ذیصلاح از مسائل و تئوری‌های به کار گرفته شده (طبق جدول شماره (۱)) دارد. توجه شود که اندازه‌گیری مقدار خطا به علت ناسازگاری در قضاوتها جنبه دیگری از نظرهاست. شرط کافی و لازم برای اینکه A سازگار باشد وجود رابطه $\lambda_{\max} = n$ است. اما غالباً رابطه $\lambda_{\max} > n$ برقرار می‌شود. برای اندازه‌گیری انحراف می‌توان رابطه زیر را به‌عنوان شاخص سازگاری (CI : Consistency Index) به کار گرفت^(۱):

$$m = C.I. = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$$

این شاخص به طور تصادفی برای ماتریس‌های معکوسه در ابعاد مختلف تست و ترسیم شده

1- Saaty T.L., Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process, RWS Publication Pittsburgh Pennsylvania, 1988. Original version published by McGraw - Hill, 1980 .

جدول شماره (۱) - دامنه مقیاس $n = 9$ و تفسیر آن

توضیح	تعریف اهمیت	شدت اهمیت
هر دو فعالیت به نسبت مساوی بر روی مفعول اثر می‌گذارند	اهمیت مساوی	۱
تجزیه و قضاوت برتری جزئی یکی را بر دیگری ابراز می‌دارد	اهمیت متوسط یکی بر دیگری	۳
تجزیه و قضاوت برتری قوی یک فعالیت را بر فعالیت دیگری ابراز می‌دارد	اهمیت اساسی و قوی	۵
یک فعالیت شدیداً پشتیبانی و تسلط آن را بر دیگری در عمل به اثبات رسانیده باشد	اهمیت بسیار قوی یا مستدل و ثابت شده	۷
شواهد، حداکثر برتری ممکن را نشان می‌دهند	اهمیت مطلق (بی نهایت)	۹
هنگامی که سازش ایجاد می‌نمایند	ارزشهای میانی دو قضاوت مجاور به هم	۲ و ۴ و ۶ و ۸
	اگر فعالیت i یکی از اعداد فوق را هنگامی که با فعالیت j مقایسه می‌شود بپذیرد، سپس وقتی j با i مقایسه می‌شود، دارای ارزش عکس آن، خواهد بود	عکس اعداد فوق
سازگاری حتماً باید آزمایش گردد	نسبتهائی از مقیاس فوق	استدلال

است (برای مشاهده تفصیل جزئیات به ضمیمه A مراجعه نمایید). میانگین (AI : Average Index) شاخص سازگاری برای n-های مختلف به صورت زیر تجربه شده است:

n (تعداد عناصر)	2	3	4	5	6	7	8
A.I. (میانگین)	0.00	0.52	0.90	1.12	1.24	1.35	1.41

برای ماتریس‌های هم اندازه نسبت (C.I.) به (A.I.)، موسوم به نسبت سازگاری C.R. (یا Consistency Ratio) بوده و به دلایل علمی و روان شناسی (بر مبنای کاربردهای مختلف AHP در موضوعات پیچیده) نسبت سازگاری 0.1 یا کمتر، سطح مناسب و معنی داری از سازگاری شناخته شده است. اگر نتیجه محاسبات، مقداری بیش از این میزان را نشان بدهد، تجدید نظر در محاسبات و نحوه قضاوتها توصیه می‌گردد.

جدول شماره (۱)، دامنه و اجزای مقایسه را وقتی $n = 9$ باشد برای ارجحیت نسبی یا اهمیت نسبی یک عامل در مقایسه با عوامل دیگر را نشان می‌دهد. اگر یک عامل قابل مقایسه با عوامل دیگر نباشد تکنیکهای خوشه‌ای (Clustering) را برای طبقه‌بندی عناصر می‌توان به کار گرفت.

۴ - تخمین ثروت کشورها از طریق نفوذ آنها بر جهان
تاکنون افراد زیادی مسأله اندازه گیری قدرت نسبی کشورها را در جهان مورد بررسی قرار داده‌اند. دکتر ساعتی و خوچا^(۱) در سال ۱۹۷۶ این پدیده را مطالعه نموده و چنین فرض

۱. برای تفصیل جزئیات به مقاله زیر رجوع شود.

نمودند که «قدرت» ممکن است تابعی از چندین عامل: ۱- نیروهای ماهر انسانی، ۲- ثروت، ۳- تکنولوژی، ۴- تجارت، و بالاخره، ۵- قدرت نظامی باشد.

در این مطالعه ایدئولوژی، فرهنگ و منابع طبیعی (از قبیل نفت) به شمار نیامده است. به عنوان مثال، برای تجزیه و تحلیل ۷ کشور: آمریکا، شوروی (سابق)، چین، فرانسه، بریتانیا، ژاپن، و آلمان غربی که اثر و نفوذ آنها در جهان مورد توجه بسیار بوده‌اند، انتخاب و بررسی گردیده است.

در این تخمین فقط پدیده «ثروت» در کشورها به عنوان کاربرد نمونه از مسائل مشابه مورد استفاده قرار گرفته است. در نتیجه، در اینجا فقط یک عامل از ۵ عامل فوق بررسی می‌شود که محاسبات بقیه عوامل، پروسه مشابهی را نیز در برخواهد داشت. سؤالی که مطرح می‌شود چگونگی تعیین اهمیت و قوت یک کشور در مقایسه با کشورهای دیگر و نفوذی که هر یک ممکن است از طریق ثروت بر جهان داشته باشند، می‌باشد.

جدول شماره (۲) - مقایسه ثروت کشورها

کشورها	آلمان غربی	ژاپن	بریتانیا	فرانسه	چین	شوروی سابق	آمریکا
آمریکا	5	5	6	6	9	4	1
شوروی سابق	4	3	5	5	7	1	1/4
چین	1/5	1/7	1/5	1/5	1	1/7	1/9
فرانسه	1/3	1/3	1	1	5	1/5	1/6
بریتانیا	1/3	1/3	1	1	5	1/5	1/6
ژاپن	3	1	3	3	7	1/3	1/5
آلمان غربی	1	1/2	3	3	5	1/4	1/5

اولین ردیف جدول فوق، مقایسه ثروت کشور آمریکا با سایر ملل است. آمریکا نسبت به خودش دارای اهمیت مساوی ۱ (عدد ۱ در سلول a_{11}) و در مقایسه با شوروی از اهمیتی بین

متوسط تا قوی (عدد ۴ در سلول a_{12}) و در مقایسه با چین از برتری مطلق (عدد ۹ در سلول a_{13}) برخوردار است. همچنین در مقایسه با کشورهای فرانسه و بریتانیا از اهمیت قوی و اثبات شده‌ای (عدد ۶ در سلول‌های a_{14} و a_{15}) و در مقایسه با ژاپن و آلمان غربی از اهمیت شدیدی (عدد ۵ در سلول a_{16} و a_{17}) برخوردار بوده‌است. عکس این اعداد در سطرهای مختلف ستون اول بیانگر رابطه معکوس اهمیت نسبی ثروت کشورهای دیگر در مقایسه با ثروت آمریکا خواهد بود.

توجه کنید که ماتریس ناسازگار است، زیرا برای مثال وقتی $۴ = (شوروی / آمریکا) = ۷ = (چین / شوروی)$ باشد، در نتیجه به جای رقم ۹ در رابطه $۹ = (چین / آمریکا)$ باید رقم ۲۸ به دست می‌آید^(۱). هنگامی که این محاسبات تعدیل شوند، وزن نسبی آمریکا و روسیه سابق به ترتیب $۴۲/۹$ و $۲۳/۱$ خواهد بود که این وزنها با محصول ناخالص ملی (GNP) و درصدی از کل آن، به طور بسیار متناسبی مطابقت پیدا می‌کنند.

در جدول شماره (۳) علی‌رغم انتخابی بودن ظاهری وزنها، بی‌نظمی‌های غیر منتظره‌ای دیده نشده و ارقام به طور مرتب با اطلاعات و آمار داده شده مطابقت دارند. به هر حال مقدار آیگن ماکزیمم ماتریس برابر با $۷/۶۱$ بوده، که در مقایسه با بردار آیگن ماکزیمم ماتریس برابر با $۷/۶۱$ بوده، و در مقایسه با بردار آیگن در جدول (۳) و یا محصول ناخالص ملی واقعی که به صورت نرمال شده (ستون آخر جدول ۳) تشابه متناسبی را نشان می‌دهد. در ضمن نتایج بدست آمده ثابت می‌کند که چون محصول ناخالص ملی چین بین ۷۴ تا ۱۲۸ میلیارد دلار متغیر بوده‌است، به احتمال زیاد نمی‌بایست در این گروه مورد مقایسه قرار می‌گرفته و بهتر بود که از گروه حذف می‌شد. در این مثال علاوه بر بزرگترین مقدار آیگن^(۲) یعنی $۷/۶۱$ مقادیر کمپلکس دیگر نیز ارائه شده و چون $m < 0.1$ است در نتیجه خطا قابل اغماض است.

$$۲۸ = ۴ \times ۷ = \frac{\text{امریکا}}{\text{چین}} = \frac{\text{شوروی}}{\text{چین}} \times \frac{\text{آمریکا}}{\text{شوروی}}$$

- ۱

۲ - مقادیر دیگر (کمپلکس) بردار آیگن به قرار زیر می‌باشند:

$$-11 \quad 0.14 - 2.06i, 0.14 + 2.06i, -0.330 - 0.558i, -0.330 + 0.558i, -0.228, 2 * 10$$

$$m = (\lambda - n) / (n - 1) = (7.61 - 7) / 6 = 0.61 / 6 = 0.1017$$

و طبق ضمیمه A انحراف معیار آن معادل، $\sqrt{2m} = \sqrt{2 \times 0.1017} = 0.45$

$$m' = \frac{m}{\text{(مقدار متناسب از روی جدول شماره (۴) ضمیمه A)}} = \frac{0.017}{0.345} = 0.0756$$

و

به طور مشابه می توان برای درآمد یا هر متغیر مشابه دیگری نیز جدول مشابهی را به کار برده و حتی بودجه و یا اعتبارات را برحسب درآمد سرانه (با رابطه مستقیم یا غیر مستقیم) بین چند منطقه توزیع نمود.

جدول شماره (۳) - بردارهای ویژه آیگن «ثروت» نرمال شده

	محصول ناخالص ملی (GNP) بردار آیگن نرمال شده	به میلیارد دلار در ۱۹۷۲	نسبت GNP هر کشور به کل (نرمال شده)
آمریکا	۰/۴۲۹	۱۱۶۷	۰/۴۱۳
شوروی	۰/۲۳۱	۶۳۵	۰/۲۳۵
چین	۰/۰۲۱	۱۲۰	۰/۰۴۳
فرانسه	۰/۰۵۳	۱۹۶	۰/۰۶۱
بریتانیا	۰/۰۵۳	۱۵۳	۰/۰۵۵
ژاپن	۰/۱۱۹	۴۱۲	۰/۱۰۴
آلمان غربی	۰/۰۹۵	۲۰۷	۰/۰۱۱
	۱	۱۸۲۳	۱

۵ - مفاهیم عمومی سلسله مراتب و تعیین اولویت

اگرچه اغلب دانشجویان با ایده و مفاهیم اصلی سلسله مراتب آشنا هستند. اما فقط تعداد معدودی از آنان این مفاهیم را در افکار و اعمال خود به طور عمیق منعکس می نمایند و حتی تعداد معدودتری نیز به اهمیت و قدرت آن به عنوان یک مدل واقعی در بررسی سیستم های پیچیده پویا پی برده اند. نظری کوتاه به چگونگی بهره گیری از این پدیده در سیستم های دنیای

واقعی، فرآیند و ثمرات این نوع مدلها را روشن تر می سازد.

معمولاً هر سیستم پیچیده‌ای را می‌توان طوری در قالب ماتریس ارائه نمود، که به نحوی ردیفها و ستونهای آن معرف کیفیت اجزای ترکیبی آن سیستم باشند. اگر عامل i با عامل j شدیداً اثرات متقابل بر هم داشته باشند، مقدار سلول i و j -ام نزدیک به ± 1 و اگر اثری بر یکدیگر نداشته باشند، مقدار این سلولها نزدیک به صفر خواهد بود (در سیستمهای بزرگ اغلب سلولهای ماتریس نزدیک به صفر هستند). خصوصیات و ارتباط عوامل و عناصر یک سیستم با یکدیگر باعث تشخیص سطوحی از آن می‌شود که سلسله مراتب منسجمی را در بردارد. سطوح مختلف سلسله مراتب معمولاً به وسیله ساختمان یا کارکرد (Function یا Structure) از یکدیگر متفاوت هستند، که در آن عملکرد مرتب سطح بالاتر بستگی به کارکرد مرتب سطح پایین تر مجاور آن دارد. در بررسی سطوح سلسله مراتب، درک کنش و واکنشهای سطوح مختلف مخصوصاً در بالاترین سطح نسبت به درک مستقیم عوامل در سطوح پایین، مسأله بسیار مهم می‌باشد. اخیراً در رابطه با کاربردهای برنامه ریزی، روشهای ارزنده‌ای مخصوصاً در رشته علوم اجتماعی و انسانی ساخته شده‌است، که از آن جمله مطالعات برجسته دکتر سیمون آندو^(۱) در مورد نحوه ارزیابی اثرات هر سطح بر سطح دیگر می‌باشد. طبق تعریف، «سلسله مراتب» عبارت از کیفیت نظم و ترتیب و ارتباط ساختاری خاص هر سیستم است که تجزیه آن به زیر جزءهای (Partitions) مختلف به‌عنوان زیرمجموعه‌ها مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرند. این قسمتها، سطوح (Levels) مختلف سلسله مراتب (Hierarchies) نامیده می‌شوند. ساده‌ترین نوع سلسله مراتب، شکل خطی آنست که در آن سطوح مجاور به طور خطی از یک درجه به درجه دیگری انتقال یافته و هرچه سطح بالاتر برود، ممکن است نسبت پیچیدگی در آن افزایش یابد.

ساختمان بدن انسان و موجودات زنده مجموعه‌های جامع و کامل سلسله مراتب، و شکل ساده آن، تشکیلات سازمانی و نظامهای بزرگ است. اگر عوامل هر سطح از سلسله مراتب، با تمام عوامل سطوح مجاور (بعدی) ارتباط داشته باشند آن را یک سلسله مراتب کامل می‌نامند. شکل شماره (۱) سلسله مراتب کامل یک سیستم را نشان می‌دهد که در آن سطح اول فقط

1 - H. A. Simon & A. Ando, "Aggregation of variables in dynamic systems", *Econometrica*, 18 April 1961, 59, No 2, PP. 111 - 138.

دارای یک هدف نهایی مثلاً، «بهبودی وضع رفاهی عمومی» یک کشور بوده و اولویت آن مساوی یک فرض می‌شود. سطح دوم دارای سه هدف مانند افزایش سطح بهداشت و خدمات، افزایش قدرت دفاع ملی و اقتصادی قوی است که اولویت آنها از مقایسه زوج زوج عوامل با یکدیگر به صورت یک ماتریس در رابطه با سطح اول معین می‌گردد. اگر به طور مثال سطح سوم دارای اهدافی مربوط با صنایع کشور باشد، هدف اصلی مطالعه اثرات این صنایع بر روی سطح اول (بهبودی وضع رفاه عمومی کشور) با استفاده از هر یک از پدیده‌های سطح دوم می‌باشد، که بردار اولویت از تلفیق بردار آنگن در سطح دوم و ماتریس متجه در سطح سوم با توجه به اهداف و مطلوبیت نهایی کل سیستم، و سیاستهای مربوط به روند صنایع در کشور مشخص می‌شوند.

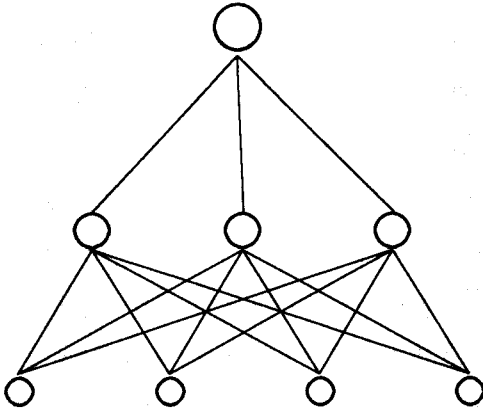
در شکل شماره (۲) سلسله مراتب دارای چهار سطح: (۱) - بهبودی وضع رفاه عمومی کشور، (۲) - مجموعه سناریوهای توسعه ممکن آینده کشور، (۳) - مناطق یا استانهای مختلف کشور و سرانجام (۴) - پروژه‌های عمرانی مختلف (مثلاً حمل و نقل، مسکن و...) استانها می‌باشد. توجه کنید که تمام استانها احتمالاً از سناریوهای ممکن آتی متأثر نبوده و همچنین تمام پروژه‌های عمرانی بر روی تمام استانهای مختلف اثر نمی‌گذارند. آنچه که شکل شماره (۲) نشان می‌دهد یک سلسله مراتب ناقص بوده و هدف اصلی آن تعیین اولویت برنامه‌های (یا پروژه‌های) عمرانی (به طوری که بر بهبودی وضع رفاه عمومی کشور اثر داشته باشد)، می‌باشد. در اینجا باید اولویت‌های هر مجموعه را از طریق نسبت تعداد عوامل موجود در آن مجموعه به نسبت تعداد کل عوامل در سطوح ماقبل درجه‌بندی نمود. این روش فقط در مواقعی که سلسله مراتب ناقص است به کار برده می‌شود.

اهداف ویژگیهای ترکیب سطوح مختلف سلسله مراتب در یک سیستم را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

۱ - روشی که برای طبقه‌بندی و درجه‌بندی اهمیت و اولویت فعالیتها و تصمیمات به کار رفته و به وسیله اطلاعات، مشاهدات و تجربه با استفاده از یک بینش و تفکر منطقی تحقق پذیرفته و اصولاً با منطق نظام طبیعت و کائنات هماهنگ‌تر است.

۲ - تقریباً قابل تجزیه (Decomposable) به سطوح مختلف بوده و چون ارتباط بین سطوح بسیار ساده‌تر از ارتباط اجزای هر سطح می‌باشد، هدف هر قسمت می‌تواند به طور مجزا و در رابطه با کل -- به مفهوم واقعی سیستم -- بررسی گردد.

سطح اول سلسله مراتب



سطح دوم سلسله مراتب

سطح سوم سلسله مراتب

شکل شماره (۱) - سلسله مراتب کامل برای تعیین اولویت های صنایع کشور

سطح اول سلسله مراتب

بهبودی وضع (رفاه) عمومی کشور

سطح دوم سلسله مراتب



سناریوهای توسعه

سطح سوم سلسله مراتب

مناطق کشور

سطح چهارم سلسله مراتب

پروژه های عمرانی



شکل شماره (۲) - سلسله مراتب برای تعیین اولویت برنامه های عمرانی در یک برنامه ریزی

۳- معمولاً دارای چند زیر سیستم (Subsystem) بوده که با عوامل مختلفی ارتباط داشته و به وسیله «تجزیه» مطالعه اثرات متقابل و ارتباط بین قسمتها، بررسی را ساده تر و عملی تر می نماید.

۴- نظم و ترتیب سطوح مختلف و عوامل ارتباطی آنها ممکنست، طبقه بندی، کدگذاری و آنالیز شوند که این عمل باعث سادگی تحلیل سیستمهای پیچیده می شود. قوانینی که سطوح مختلف یک سلسله مراتب را توصیف می کنند عموماً متفاوتند. مطالعه مستقیم عوامل سطوح مختلف به تنهایی موضوع مهمی نبوده بلکه شناخت سطح بالاتر و پایین تر و تأثیر فعل انفعالی هر سطح با سطوح زیرین آنها، مسأله اساسی می باشد. تعیین انتخاب سطوح، معمولاً بستگی به درک و تعبیر و تفسیر مشاهده کننده از آن سیستم دارد. نکات اصلی را می توان برحسب مفاهیم و قضایای ریاضی به صورت زیر تعریف نمود: اگر H ، یک مجموعه معین نیمه منظم (Finite partially ordered set) که بزرگترین عنصر آن b است را در نظر بگیریم، و اگر شروط زیر برقرار باشند، H یک مجموعه سلسله مراتبی خواهد بود:

الف - L_k قابل تجزیه و تفکیک ($k = 1, \dots, h$) به زیر مجموعه هایی از H که در

آن $L_1 = \{b\}$ است، می باشد،

ب - $x \in L_k$ می باشد.

برای هر $X \in H$ یک تابع وزن بندی مناسب (Weighting function) وجود دارد (که ماهیت آن بستگی به پدیده های موجود در ساختار مرتبه بندی شده آن دارد). مجموعه های L_i سطوح (Levels) سلسله مراتب و تابع w_x ، تابع اولویت عناصر (Priority function) در یک سطح با توجه به یک هدف مشخص x است. w_x ممکن است برای تمام L_x با تنظیم آن معادل با صفر، برای تمام عناصر L_x قابل تعریف باشد. به عبارت ساده تر اگر در یک سیستم اقتصادی - اجتماعی مفروض با هدف کلی b و با مجموعه فعالیت های عمده، L_h (به تعداد h سطح) به صورت یک سلسله مراتب که بزرگترین عنصر آن b و پایین ترین سطح آن L_h است، مدل سازی شوند، آیا اولویت های عناصر L_h با توجه به b چگونه خواهند بود؟ حل مسأله اصلی را می توان به صورت مجموعه ای (Set) در زیر ارائه نمود که اگر در آن H

طبق تعریف یک مجموعه معین و b بزرگترین عامل آن باشد^(۱) این سلسله مراتب مفروض دارای خواص زیر خواهد بود:

$$Y = \{ y_1, \dots, y_m \} \in L_k$$

$$X = \{ x_1, \dots, x_m \} \in L_{k+1}$$

همان طوری که قبلاً ذکر شد برای هر $\alpha \in H$ یک تابع وزن‌بندی شده متناسب، وجود دارد L_k به ماهیت پدیده‌های مترتبه و به ساختمان آن بستگی داشته و در آن سطوح مختلف سلسله مراتب است.

در تعیین حد مطلوبیت تخصیص منابع بین عوامل مختلف، وابستگی فعالیتها به یکدیگر باید مورد توجه قرار بگیرد. این وابستگی که ممکن است به صورت روابط داده‌ها - ستانده‌ها (Input- Output) مانند جریان ورودی یا تبادل کالاها و محصولات در میان بخشهای مختلف صنعت باشد. امکان دارد یک صنعت با اولویت زیاد وابسته به جریان مواد از صنایعی با درجات پائین تر باشد. در قالب مدل‌های بهینه‌یابی، اولویت عناصر موجب می‌شود که تابع هدفی (Objective Function) که باید بیشینه‌یابی (Maximize) شود تعریف گردیده و سلسله مراتب دیگر باعث عرضه اطلاعات در رابطه با امکانات و محدودیتها (نظیر روابط داده‌ها - ستانده‌ها) بشود. برحسب تعریف در روابط فوق برای حل مسأله اصلی می‌توان X و Y را به صورت خلاصه زیر تعریف نمود:

$$Y = L_k$$

$$X = L_{k+1}$$

اگر «تابع اولویت عناصر در X در رابطه با Z » به w نشان داده شود، با توجه به تابع اولویت، اگر عنصر Z به فرض $Z \in L_{k+1}$ باشد، تابع w_x ، با توجه به هدف آن یعنی x ، یک تابع اولویت عناصر در سیستم بوده و حد مطلوب سیستم از فرمول زیر قابل تعیین است.

۱. برای توضیح بیشتر و رجوع و اثبات قضایا و احکام به مقاله دکتر ساعتی ۱۹۷۷ رجوع شود.

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n_k} w_{y_j}(x_i) w_z(y_j) \quad i=1, \dots, n_{k+1}$$

فرمول فوق یک پروسه وزن‌بندی و درجه‌بندی تأثیرات عنصر y_j بر روی اولویت x_i که در اهمیت y_j (با توجه به z) ضرب شده‌است، می‌باشد. در این الگوریتم اگر $w_{y_j}(x_i)$ را به صورت ماتریس B تصویر کرده که در آن با $b_{ij} = w_{y_j}(x_i)$ باشد و به همین ترتیب اگر $W_i = w(x_i)$ و $W'_j = w_z(y_j)$ عمل شوند، پروسه فوق به صورت فرمول ساده زیر در خواهد آمد:

$$W_i = \sum_{j=1}^{n_k} b_{ij} W'_j \quad i=1, \dots, n_{k+1}$$

یعنی، اگر W را به بردار اولویت و B را به ماتریس اولویت در سطح $(k+1)$ ام نشان دهیم $W = BW'$ می‌شود.

حال اگر H یک سیستم سلسله‌مراتبی کامل که بزرگترین عنصر آن b و تعداد سطوح آن h بوده و B_k ماتریس اولویت سطح k ام ($k=2, \dots, h$) باشد، و اگر W' بردار اولویت مثلاً سطح p ام ($p < q$) با توجه به عناصری از z در سطح $(p-1)$ باشد، رابطه فوق به صورت زیر در خواهد آمد.

$$W = B_q B_{q-1} \dots b_{p+1} W'$$

که در آن بردار اولویت در پایین‌ترین سطح با توجه به عنصر b ، بر حسب زیر خواهد بود:

$$W = B_h B_{h-1} \dots B_2 W'$$

اگر L_1 فقط دارای یک عنصر باشد، W' به صورت یک عدد (اسکالر) (Scaler) اگر

درمی‌آید، و اگر عناصر بیشتری داشته باشد، به صورت بردار خواهد بود. در نتیجه، اولویت یک عنصر در یک سطح، حاصل جمع اولویت‌های آن در هر یک از زیرسیستم‌های متعلق به

آنست که مجموعه اولویت‌های استنتاج شده از عناصر در هر سطح، نرمال‌سازی به یک می‌شود. به همین ترتیب اولویت هر زیرمجموعه در هر سطح مساوی اولویت عنصر غالب در سطح بعدی است.

۶ - تعیین اولویت: نمونه‌هایی از سلسله مراتب چند بعدی انتخاب بهترین طرح یا پروژه

در سیستم‌هایی که در آنها تعیین اولویت به نحوی مطمح نظر باشد، می‌توان آنها را به صورت سلسله مراتب و به سطوح مختلف تجزیه نمود که این سطوح ممکن است در آنها نمایانگر نوع فعالیت‌هایی باشند که بر اهداف، سیاستها و استراتژی‌ها اثر نموده و یا کنترل فرآیندها، تقدم و تأخر اقدامات و فعالیتها را توجیه بنمایند. در این روش، تجزیه و تحلیل‌ها منجر به تعیین وزن‌ها یا درجه‌بندی اهمیت فعالیتها می‌گردد. این وزن‌ها موجب تشخیص سناریوهایی می‌گردد که توسط بردارهای مرکبی نقطه نظرهای مطلوبی را تعریف یا بررسی نموده و فرصت‌های مناسبی را برای طراحی، کنترل و نتیجه‌گیریهای لازم به ارمغان می‌آورد^(۱).

به عنوان یک نمونه، فرض کنید در منطقه ای چهار پروژه نظیر K, S, R, A در دست مطالعه است که به علت محدودیت منابع، انتخاب و تکمیل فقط یک پروژه امکان پذیر باشد. اگر در رابطه با هر پروژه به فرض فقط بررسی پنج عامل یا پدیده مشترک به صورت زیر مورد نظر باشد، اجرای کدام یک از پروژه‌ها ارجحیت و اولویت بالائی دارد؟ یا اینکه آیا اعتبار محدود باید به چه نسبتی به هر یک تخصیص یابد؟

P_1 : تسهیلات پژوهشی و تحقیقاتی جهت طرح و اجرای پروژه،

P_2 : اثرات مثبتی که ممکن است اجرای پروژه بر روی رشد منطقه داشته باشد،

P_3 : ایجاد کار و اشتغال و رونق اقتصادی، حاصل از پروژه

۲۰ - برای تفصیل بیشتر به مقاله زیر رجوع شود:

T.L. Saaty & P.C. Rogers, The Future of Higher Education in the U.S. (1985-2000),

Soccio - Economic Planning Science, Dec. 1976, 1, No. 6, PP 251-264.

P_4 : هزینه‌های جانبی احتمالی (یا رابطه عکس هزینه) در هر طرح، و سرانجام

P_5 : اثرات اجتماعی و رفاهی

پروژه‌هایی که انتخاب یکی از آنها مورد نظر است:

A: آب رسانی

R: رفاهی و بهداشتی

S: مجتمع صنعتی

K: سیستم کشاورزی

قسمت بالای ضمیمه B، در جدول شماره (۵)، ماتریس مقایسه‌ای عوامل مختلف و شدت نسبی اهمیت آنها در رابطه با انتخاب هریک از پروژه‌ها و مقایسه زوجی پروژه‌ها در رابطه با هر عامل نشان داده شده است.

در قسمت پایین جدول شماره (۵) پنج جدول (4×4) برای هریک از پنج پدیده P_1 الی P_5 را در نظر بگیرید، اگر بردارهای ویژه آیگن هریک از ۵ پدیده را مجدداً به ترتیب (که در ستون آخر هر جدول ارائه شده است) به صورت جدولی به ابعاد 4×5 که در آن سطرها مبین پروژه‌ها و ستونها مبین پدیده‌ها باشند، مرتب نمائیم، می‌توان برای تعیین اولویت نهایی این ماتریس (4×5) را در بردار (5×1) ویژه آیگن حاصل از ماتریس وزنها (ستون آخر و سمت راست جدول شماره ۵ فوق) ضرب کرد. از نتیجه این حاصل ضرب، بردار اولویت نسبی طرحها استنتاج می‌شود.

حاصل درجه‌بندی چهار پروژه که ناشی از تعیین اولویت آنها است، به صورت زیر خلاصه می‌گردد:

$$A = 0.287 \quad , \quad R = 0.251 \quad , \quad S = 0.235 \quad , \quad K = 0.227$$

همچنین اگر مبلغ مشخصی به‌عنوان اعتبار جهت تخصیص بین چهار پروژه فوق در دست باشد، می‌توان آنرا در بردار متجه وزنها ضرب نمود تا سهم هریک استحصال شود (به عبارت دیگر اعتبار را نرمال سازی کرد).

اگر چه این بردار خاطر نشان می‌سازد که چهار پروژه تقریباً دارای اولویت‌های یکسانی بوده و احتیاج به ارزیابی جامع تر و ضوابط دیگری علاوه بر اطلاعات موجود دارند، ولی در چگونگی نحوه نتیجه‌گیری فرآیند، بی‌اثر است. ضمیمه C کلیه محاسبات ذریبط را با تستهای مختلف و رسم نمودار آن با استفاده از ریز کامپیوتر و بسته نرم‌افزار Expert Choice به طور مبسوط نشان می‌دهد.

ضمیمه A

روش متداول در پر کردن سلول های ماتریس، مقایسه شدت اهمیت یا ضعیف فعالیت های i (ردیفها) در سمت چپ با همان فعالیتها j (در ستونها) در سمت بالا و سمت راست (که هر دو دارای ماهیت مشابهی هستند) می باشد. بدین طریق پس از مشخص شدن a_{ij} ، ارزش معکوس مقادیر به طور اتوماتیک برای سلول a_{ji} در نظر گرفته می شود. باید توجه داشت که ممکن است سازگاری (شرط لازم) به تنهایی خوب بوده ولی در رابطه با حقایق از سیستم، توزیع و ارتباط این ارزیابی ها متوازن نباشند. این مطلب قبلاً "بررسی گردیده و به وسیله سازگاری از طریق محاسبات میانگین (m) خطاها و انحراف معیار آنها $\sqrt{2m}$ و لزوم اینکه نسبت آنها کمتر یا مساوی یک باشد، ($m \leq 1$) مشخص شده است.

$$m = (\lambda_{\max} - n) / (n - 1)$$

تلاشهای زیادی برای بهره گیری از مقیاسهای بزرگتر و مختلف از جمله مقیاسهای (۱-۵)، (۱-۷)، (۱-۹)، (۱-۱۵)، (۱-۲۰) و ۱ تا ۹۰ با نمونه برداریهای ۵۰ تایی، به طور تصادفی انجام گرفته که مقیاس ۱ تا ۹ بهترین نتیجه را داشته است و هر چه n از ۹ بالاتر رود، میزان سازگاری کمتر می شود. مثلاً طبق تجربه، معدل سازگاری (m) برای ۵۰ ماتریس با اجزای تصادفی در مواقعی که $n = 5$ (مقیاس ۱ تا ۵)، $n = 7$ (مقیاس ۱ تا ۷)، $n = 9$ (مقیاس ۱ تا ۹)، n (مقیاس ۱ تا ۱۵)، $n = 15$ (مقیاس ۱ تا ۱۵)، $n = 20$ (مقیاس ۱ تا ۲۰) باشد، به ترتیب برابر با اعداد $0/5$ و $1/0$ ، $1/5$ ، $2/75$ و 3 می باشد. نتیجه این تجربیات به طور خلاصه در جدول شماره (۴) نشان داده شده که ناسازگاری (شرط کافی) و میزان خطاها را می توان طبق فرمول زیر محاسبه نمود:

$$m' = \frac{m}{\text{مقدار داده شده در جدول شماره (۴) بر حسب مقیاس و ابعاد ماتریس}}$$

صحت ارزیابی روابط بین پدیده ها، وقتی $m' < 0.1$ باشد قابل تأیید است. جدول شماره (۴) برای محاسبه ناسازگاری بسیار مفید بوده و دیده می شود که هر چه n بزرگتر باشد میزان ناسازگاری زیادتر خواهد بود.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Scale										
1 - 5	1.00	0.62	0.47	0.26	0.25	0.169	0.036	0.089	0.036	0.068
1 - 7	1.00	0.51	0.52	0.33	0.24	0.214	0.087	0.087	0.080	0.039
1 - 9	1.00	0.72	0.42	0.24	0.22	0.088	0.096	0.109	0.037	0.055
1 - 15	1.00	0.75	0.38	0.28	0.14	0.165	0.160	0.102	0.049	0.023
1 - 20	1.00	0.66	0.48	0.25	0.14	0.125	0.082	0.053	0.028	0.051
1 - 90	1.00	0.84	0.48	0.23	0.194	0.118	0.126	0.069	0.043	0.061

ضمیمه B

جدول شماره (۵) - ماتریس مقایسه زوجی عوامل

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	بردار آیگن
P ₁ : تسهیلات تحقیقاتی	1	1/5	1/5	1	1/3	0.09
P ₂ : رشد منطقه‌ای	5	1	1/5	1/5	1	0.13
P ₃ : ایجاد کار و اشتغال	5	5	1	1/5	1	0.23
P ₄ : تأثیر عکس هزینه	1	5	5	1	5	0.43
P ₅ : اثرات اجتماعی و رفاهی	3	1	1	1/5	1	0.13

Inconsistency Ratio = 0.399^(۱)

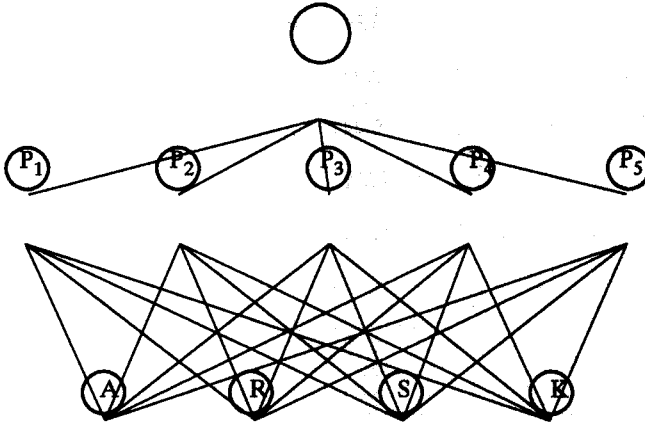
P ₁	A	R	S	K	بردار آیگن	P ₂	A	R	S	K	بردار آیگن
A	1	3	7	9	0.58	A	1	1/5	1/6	1/4	0.06
R	1/3	1	6	7	0.30	R	5	1	2	4	0.48
S	1/7	1/6	1	3	0.08	S	6	1/2	1	3	0.32
K	1/9	1/7	1/3	1	0.04	K	4	1/4	1/6	1	0.14
$\lambda_{\max} = 4.21$						$\lambda_{\max} = 4.34$					
Inconsistency Ratio = 0.077						Inconsistency Ratio = 0.066					

۱. توجه: عدم سازگاری بیش از 0.1 یا بیشتر، نیاز به بررسی بیشتر دارد.

P ₃ بردار آیگن					P ₄ بردار آیگن						
A	R	S	K		A	R	S	K			
A	1	7	7	1/2	0.36	A	1	4	1/4	1/3	0.21
R	1/7	1	1	1/7	0.06	R	1/4	1	1/2	3	0.19
S	1/7	1	1	1/7	0.06	S	4	2	1	3	0.41
K	2	7	7	1	.052	K	3	1/3	1/3	1	0.18
$\lambda_{\max} = 4.06$					$\lambda_{\max} = 5.38$						
Ratio = 0.023 Inconsistency					Inconsistency Ratio = 0.518						

P ₅	A	R	S	K	بردار آیگن
A	1	1	7	4	0.43
R	1	1	6	3	0.38
S	1/7	1/6	1	1/4	0.05
K	1/4	1/3	4	1	0.14
Inconsistency Ratio = 0.030 $\lambda_{\max} = 4.08$					

انتخاب بهترین پروژه



GOAL: THE BEST PROJECT
With respect to
GOAL TO THE BEST PROJECT

EXTREME
VERY STRONG
STRONG
MODERATE
EQUAL

P2
is STRONGLY MORE IMPORTANT THAN
P1

EXTREME-----
VERY STRONG-----
STRONG----- <--
MODERATE-----
EQUAL-----

TO SELECT, → TO ENTER COMPARISON. MOVE BELOW EQUAL OR 'I' TO INVERT
- TO MOVE TO PREVIOUS COMPARISON
* TO CALCULATE/EXIT, <Esc> TO EXIT WITHOUT CALCULATING, N FOR NUMERICAL MODE.

GOAL: THE BEST PROJECT
With respect to
GOAL TO THE BEST PROJECT

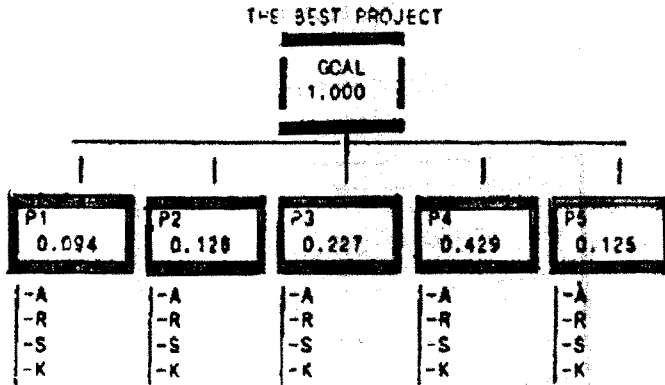
P2 is
5.0 TIMES (STRONGLY) MORE IMPORTANT THAN
P1

- 9 EXTREME
- 7 VERY STRONG
- 5 STRONG
- 3 MODERATE
- 1 EQUAL

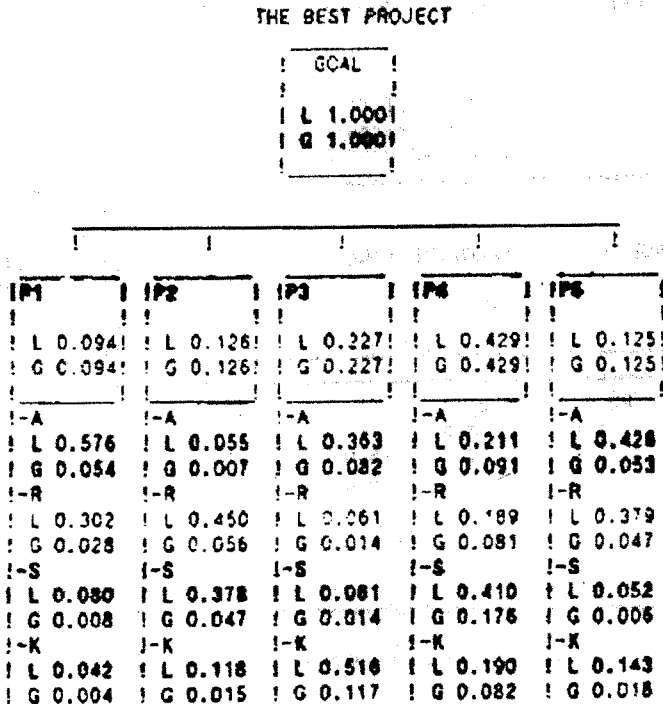
	P1	P2	P3	P4	P5
>6.0<	5.0	1.0	3.0		
P2			5.0	5.0	1.0
P3				5.0	1.0
P4					5.0
P5					

ENTER 1.0, 1.1, ... ,2.0, ..., 9.0 FOR COMPARISON (PRECEED WITH I IF INVERSE)

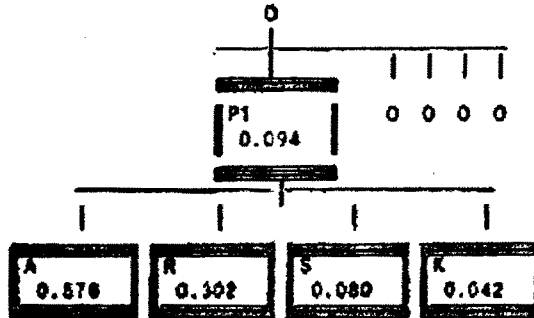
CURRENT NODE(0) GOAL
 LEVEL= 0
 LOCAL PRIORITY= 1.000



Redraw, Compare, Synthesize, Print, Edit, Options, Mark, Jump, Global, Quit, ?

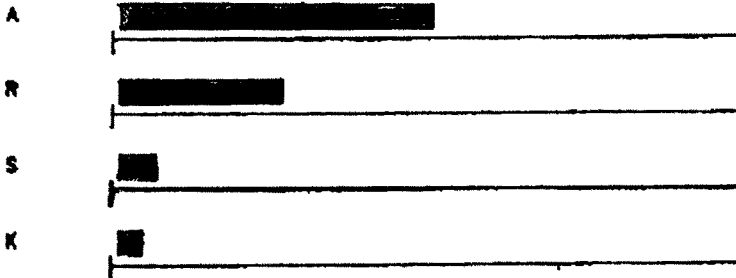


CURRENT NODE(10000) P1
 LEVEL= 1
 LOCAL PRIORITY= 0.094



Redraw, Compare, Synthesize, Print, Edit, Options, Mark, Jump, Global, Quit, ?

With respect to
 P1 < GOAL



	VALUE	WEIGHT
A	100.00000	0.576
R	52.42897	0.302
S	13.97828	0.080
K	7.25838	0.042
	<hr/> 173.66662	

(VV)

THE BEST PROJECT
TALLY FOR LEAF NODES

LEVEL 1	LEVEL 2	LEVEL 3	LEVEL 4	LEVEL 5
P1	=0.094			
.	A	=0.054		
.	R	=0.028		
.	S	=0.008		
.	K	=0.004		
P2	=0.128			
.	A	=0.067		
.	R	=0.056		
.	S	=0.047		
.	K	=0.018		
P3	=0.227			
.	A	=0.082		
.	R	=0.014		
.	S	=0.014		
.	K	=0.117		
P4	=0.429			
.	A	=0.091		
.	R	=0.081		
.	S	=0.178		
.	K	=0.062		
P5	=0.126			
.	A	=0.053		
.	R	=0.047		
.	S	=0.006		
.	K	=0.018		

THE BEST PROJECT

LEAF NODES SORTED BY PRIORITY

OVERALL INCONSISTENCY INDEX = 0.33

A	0.287	XX
B	0.251	XX
K	0.236	XX
R	0.227	XX

====
1.000

(VA)

JUDGMENTS WITH RESPECT TO
GOAL TO THE BEST PROJECT

	P1	P2	P3	P4	P5
P1		(5.0)	(5.0)	1.0	(3.0)
P2			(5.0)	(5.0)	1.0
P3				(5.0)	1.0
P4					5.0
P5					

1 EQUAL 3 MODERATE 5 STRONG 7 VERY STRONG 9 EXTREME

0.098

P1 XXXXXXXXXXXXXXXXX

0.128

P2 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

0.227

P3 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

0.429

P4 XXX

0.125

P5 XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

INCONSISTENCY RATIO = 0.398